

The background of the cover features a series of white magnetic field lines on a red background. Two black dots, representing magnetic poles, are located on the left side. From these poles, numerous white lines curve outwards, forming a series of nested, elongated loops that fill the right side of the cover. The lines are more densely packed near the poles and spread out as they move away.

electricidad y magnetismo

SEGUNDA EDICIÓN

berkeley physics course - volumen 2

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

CONSTANTES FÍSICAS

Celeridad de la luz	c	299 792 458 †	metro s ⁻¹
Carga fundamental	e	$4,803 \times 10^{-10}$	esu
		$1,602 \times 10^{-19}$	coulomb
Masa del electrón	m_e	$9,110 \times 10^{-28}$	gramo
Masa del protón	m_p	$1,673 \times 10^{-24}$	gramo
Número de Avogadro	N_0	$6,022 \times 10^{23}$	mol ⁻¹
Constante de Boltzmann	k	$1,381 \times 10^{-16}$	erg kelvin ⁻¹
Constante de Planck	h	$6,626 \times 10^{-27}$	erg s
Constante de gravitación	G	$6,672 \times 10^{-8}$	gramo ⁻¹ cm ³ s ⁻²
Momento magnético del electrón		$9,285 \times 10^{-21}$	erg gauss ⁻¹
Momento magnético del protón		$1,411 \times 10^{-23}$	erg gauss ⁻¹

† La asignación de este valor exacto a c constituye la nueva definición del metro, como se explicó en el apéndice E. Los valores de las otras constantes se han redondeado arbitrariamente a cuatro dígitos. Sin embargo, a excepción de la constante de gravitación G , todas las demás se han determinado experimentalmente con una precisión considerablemente mejor que esta.

electricidad y magnetismo

SEGUNDA EDICIÓN

electricidad y magnetismo

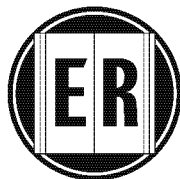
SEGUNDA EDICIÓN

berkeley physics course – volumen **2**

*La preparación de este curso fue realizada por el
Educational Services Incorporated patrocinada por el
National Science Foundation.*

Edward M. Purcell

*Gerhard Gade University Professor
Harvard University*



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México

Título de la obra original:

Berkeley Physics Course 2/e, Volume 2-Electricity and Magnetism

Edición original en lengua inglesa publicada por

McGraw-Hill Book Company, New York, USA.

Copyright © by McGraw-Hill, Inc.

Edición en papel:

© Editorial Reverté, S. A., 1988

ISBN 978-84-291-4319-5

Edición e-book (PDF):

© Editorial Reverté, S. A., 2019

ISBN 978-84-291-9301-5

Versión española por

Dr. Marcos Pujal Carrera

Catedrático de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Tarrasa (Barcelona)

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15. Local B

08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36

reverte@reverte.com

www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, queda rigurosamente prohibida, salvo excepción prevista en la ley. Asimismo queda prohibida la distribución de ejemplares mediante alquiler o préstamo públicos, la comunicación pública y la transformación de cualquier parte de esta publicación (incluido el diseño de la cubierta) sin la previa autorización de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto a los citados derechos.

Prólogo a la segunda edición del Volumen II

La revisión del volumen 2, «Electricidad y Magnetismo», del Curso de Física de Berkeley se ha hecho teniendo en cuenta tres amplios objetivos. Primero, he intentado hacer el texto más claro en muchos puntos. En los años de uso, profesores y alumnos han encontrado innumerables lugares donde para seguir sería más fácil la simplificación o la reorganización de una explicación. Indudablemente se habrán omitido algunas otras oportunidades para tales mejoras; no demasiadas, espero.

Un segundo objetivo era hacer el libro prácticamente independiente de los otros volúmenes del Curso de Física de Berkeley. Como se concibió originalmente, estaba intercalado entre el Volumen 1, que proporcionaba la necesaria Relatividad Restringida, y el Volumen 3, «Ondas y Oscilaciones», al que se asignó el tema de las ondas electromagnéticas. Ha resultado que el Volumen 2 se ha utilizado mucho independientemente. Como consecuencia de esto he efectuado ciertos cambios y adiciones. En el Apéndice A se incluye un resumen conciso de las relaciones de la Relatividad Restringida, aunque se supone cierto conocimiento previo de la Relatividad. Este resumen proporciona una referencia manejable y resumida de las ideas y fórmulas que necesitamos para comprender los campos de las cargas móviles y su transformación de una referencia a otra. El desarrollo de las ecuaciones de Maxwell para el vacío se ha trasladado del Capítulo 7, (acerca de la inducción), muy cargado, a un nuevo capítulo 9, donde con un tratamiento elemental conduce de manera natural a las ondas electromagnéticas planas, a la vez de propagación y estacionarias. La propagación de una onda en un medio dieléctrico se estudia en el Capítulo 10 en las cargas eléctricas en la materia.

Una tercera necesidad, modernizar el tratamiento de ciertos temas, era muy urgente en el capítulo de la conducción eléctrica. Una revisión sustancial del Capítulo 4 incluye ahora una sección de la física de los semiconductores homogéneos incluyendo semiconductores con impurezas. No se incluyen los dispositivos, ni siquiera el rectificador de unión, pero lo que se dice acerca de las bandas, dado-

res y aceptores puede servir como punto de partida para el desarrollo de tales temas por el profesor. Gracias a la electrónica del estado sólido, la física de las pilas voltaicas se ha hecho cada vez más importante en la vida diaria, tanto que el número de baterías en uso se acerca en orden de magnitud al de la población del mundo. En la primera edición de este libro imprudentemente se tomó como ejemplo el de una pila electrolítica —la típica Weston—, que los avances de la física pronto hicieron totalmente obsoleta. El párrafo correspondiente se ha sustituido por un análisis, con nuevos diagramas, del acumulador de plomo-ácido, omnipresente y lejos de volverse obsoleto.

Diffícilmente podía esperarse que en la revisión de un texto elemental de electromagnetismo clásico, se tendrían que tener en cuenta los nuevos desarrollos de la física de las partículas. Pero es así en dos cuestiones que se discutieron en la primera edición: el significado de la cuantización de la carga, y la ausencia aparente de monopolos magnéticos. La observación de la desintegración del protón afectaría profundamente nuestro punto de vista en la primera cuestión. Investigaciones asiduas sobre este tema, y también sobre los monopolos magnéticos, hasta ahora no dan noticia de ningún suceso confirmado, pero la posibilidad de tales descubrimientos fundamentales permanece abierta.

En cortos apéndices se han introducido tres temas especiales, extensiones opcionales del texto: Apéndice B: Radiación de una carga acelerada; Apéndice C: Superconductividad; y Apéndice D: Resonancia magnética.

Nuestro principal sistema de unidades será el sistema de unidades SI. El diagrama en la contracubierta posterior resume las relaciones básicas entre los sistemas SI y CGS. No hay objeción a una unidad «mezcla» como el ohm-cm, a menudo aún usado para la resistividad, procurando que su significado sea perfectamente claro.

La definición del metro en función del valor asignado a la celeridad de la luz, que hace poco se ha hecho oficial, simplifica las relaciones exactas entre las unidades, como se explica brevemente en el Apéndice E.

Hay algo más de 300 problemas; aproximadamente la mitad son nuevos.

No es posible agradecer individualmente a todos los profesores y alumnos que han hecho buenas sugerencias sobre cambios y correcciones. Temo que algunos quedarán defraudados al hallar que sus sugerencias no se han seguido completamente como ellos deseaban. El resultado final es una mejora sustancial, la cual espero que los lectores familiarizados con la primera edición agradecerán. Seguramente se encontrarán desaciertos a la vez antiguos y nuevos. Las comunicaciones indicándolos serán bien recibidas.

Es un placer agradecer a Olive S. Rand su paciente y cuidadosa ayuda en la producción del manuscrito.

Prólogo

a la primera edición del Volumen II

La materia de este Curso de Física de Berkeley es la electricidad y el magnetismo. La secuencia de conceptos, en líneas generales, no es nueva: electrostática, corrientes estacionarias, campo magnético, inducción electromagnética, polarización eléctrica y polarización magnética en la materia. Sin embargo, los puntos de vista son diferentes de los tradicionales. La diferencia es más notable en los capítulos 5 y 6 donde, con base en lo tratado en el Vol I, consideramos los campos eléctricos y magnéticos de las cargas móviles como manifestaciones de la relatividad y la invariancia de la carga eléctrica. Este punto de vista enfoca la atención sobre algunas cuestiones fundamentales tales como: conservación de la carga, invariancia de la carga, significado del campo. El único aparato formal de la relatividad restringida, que es realmente necesario, es la transformación de Lorentz de las coordenadas y la fórmula de la suma de velocidades. Pero, es esencial que el estudiante aporte a esta parte del curso algunas de las ideas y posturas que el Vol. I procuró desarrollar — entre ellas una disposición a considerar las cosas desde distintos sistemas de referencia, una apreciación de la invariancia, y una atención a los argumentos de simetría. También haremos mucho uso, en el Vol. II, de razonamientos basados en la superposición.

Nuestra manera de ver los fenómenos eléctricos y magnéticos en la materia es principalmente « microscópica » subrayando la naturaleza de los dipolos atómicos y moleculares, tanto eléctricos como magnéticos. La conducción eléctrica, también se describe microscópicamente siguiendo un modelo de Drude-Lorentz. Naturalmente, algunas cuestiones quedan por decidir hasta que el estudiante estudie la física cuántica en el Vol. IV. Pero hablamos libremente de una manera natural de moléculas y átomos como estructuras eléctricas con tamaño y forma y, premiosamente, de órbitas electrónicas y spin. Procuramos tratar cuidadosamente una cuestión que a menudo se evita y a veces se oculta en textos de introducción: el significado de los campos macroscópicos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ dentro de un material.

En el Vol II, el bagaje matemático del alumno se extiende al añadirle algunas herramientas de cálculo vectorial — gradiente, divergencia, rotacional y Laplaciana. Estos conceptos se desarrollan, a medida que se necesitan, en los primeros capítulos.

En sus versiones preliminares, el Vol. II se ha usado en varias clases en la Universidad de California. Se ha beneficiado del juicio crítico de algunas personas conectadas con el Curso de Berkeley, especialmente de las contribuciones de E. D. Commins y F. S. Crawford, Jr., que explicaron las primeras clases que utilizaron el texto. Ellos y sus alumnos encontraron numerosos puntos donde se necesitaban aclaraciones o algo más radical; algunas de las revisiones se basaron en estas sugerencias. El juicio crítico de los estudiantes de la última versión preliminar fueron recogidos por Robert Goren, quien también ayudó a organizar los problemas. Críticas valiosas han venido también de J. D. Gavenda que usó la versión preliminar en la Universidad de Texas, y de E. F. Taylor, de la Universidad de Wesleyan. Alan Kaufman contribuyó con sus ideas en la primera etapa de la redacción. A. Felzer trabajó en la primera parte del bosquejo como nuestro primer «estudiante de prueba».

El desarrollo de esta versión de electricidad y magnetismo fue alentada, no solamente por nuestro Comité del Curso original, sino también por colegas activos en un desarrollo tal vez paralelo del material de un nuevo curso en el Massachusetts Institut of Technology. Entre los últimos, J. T. Tesson, del M. I. T. Science Teaching Center y la Universidad de Tufts, fue especialmente útil e influyente en la primitiva formulación de la estrategia. Ha usado la primitiva versión en clase, en el M. I. T. y su lectura crítica del texto completo ha redundado en muchos cambios y correcciones.

La publicación de la versión preliminar, con sus revisiones sucesivas, fue supervisada por la Sra. Mary R. Maloney. La Sra. Lila Lowell mecanografió la mayor parte del manuscrito. Las ilustraciones las puso en su forma final Felix Cooper.

El autor de este volumen está profundamente agradecido a sus amigos de Berkeley y principalmente a Charles Kittel, por el estímulo y constante ánimo que han hecho agradable la larga tarea.

E. M. PURCELL

Prólogo

al Berkeley Physics Course

Éste es un curso de física de dos años, a nivel intermedio, para los estudiantes de ciencias e ingeniería. La intención de los autores ha sido presentar la física tan elemental como sea posible, de la misma forma que la usan los físicos en la primera línea de su campo. Hemos pretendido hacer un curso que subraye vigorosamente los fundamentos de la física. Nuestros objetivos específicos fueron introducir coherentemente, en una sucesión elemental, las ideas de la relatividad restringida, de la física cuántica y de la física estadística.

Este curso está pensado para estudiantes que hayan pasado por un curso de física en el bachillerato. Al mismo tiempo que este curso, debería seguirse un curso de matemáticas, incluyendo cálculo.

Actualmente, existen en los Estados Unidos varios nuevos cursos de física intermedia en desarrollo. La idea de hacer un nuevo curso ha surgido de varios físicos afectados por las necesidades del progreso de la ciencia y de la ingeniería a la vez que intensificar la ciencia en los centros de grado medio y superior. Nuestro propio curso se concibió en una conversación entre Philip Morrison de la Universidad de Cornell y C. Kittel a finales de 1961. Nos animaron John Mays y sus colegas de la National Science Foundation, y Walter C. Michels, entonces Presidente de la Comisión en College Physics. Un comité informal se creó para guiar este curso desde sus etapas iniciales. El comité original constaba de Luis Álvarez, William B. Fretter, Charles Kittel, Walter D. Knight, Philip Morrison, Edward M. Purcell, Malvin A. Ruderman y Jerrold R. Zacharias. La primera reunión del comité fue en mayo de 1962, en Berkeley; entonces se trazó un bosquejo provisional de un curso de física completamente nuevo. Debido a importantes obligaciones de varios de los miembros originales, el comité se reorganizó parcialmente en enero de 1964, y ahora consta de los consignados más adelante. Las contribuciones de otros se agradecen en los prólogos de cada uno de los volúmenes.

El esquema provisional y su espíritu asociado tuvieron una gran influencia en el curso producido finalmente. El esquema cubría en

detalle los conceptos y actitudes que creíamos podían y debían enseñarse a unos estudiantes que empezaban sus estudios superiores de ciencias e ingeniería. Nunca fue nuestra intención desarrollar un curso limitado a estudiantes excepcionales ni a los alumnos en posición avanzada. Hemos procurado presentar los principios de la física desde puntos de vista modernos y unificados, y partes del curso pueden por tanto parecer casi tan nuevas al profesor como a los alumnos.

Los cinco volúmenes del curso, tal como se planificó, constarán de:

- I. Mecánica (Kittel, Knight, Ruderman)
- II. Electricidad y Magnetismo (Purcell)
- III. Ondas y oscilaciones (Crawford)
- IV. Física cuántica (Wichmann)
- V. Física estadística (Reif)

Los autores de cada volumen han tenido la libertad de escoger el estilo y método de presentación que les ha parecido apropiado a su tema.

La actividad inicial del curso condujo a Alan M. Portis a diseñar una nueva física elemental de laboratorio, ahora conocida por Física de Laboratorio de Berkeley. Debido a que el curso subraya los principios de la física, algunos profesores pueden tener la sensación de que no se trata suficientemente de la física experimental. El laboratorio está sobrado de experimentos importantes y está proyectado para complementar el curso.

La asistencia financiera al desarrollo del curso vino de la National Science Foundation, con considerable aportación indirecta de la Universidad de California. Los fondos los administró la Educational Services Incorporated, una organización desinteresada establecida para administrar los sucesivos programas de mejora. Estamos en deuda, muy particularmente, con Gilbert Oakley, James Aldrich, y William Jones, todos del ESI, por su simpático y vigoroso apoyo. El ESI estableció en Berkeley una oficina bajo la competente dirección de la Sra. Mary R. Maloney para ayudar al desarrollo del curso y del laboratorio. La Universidad de California no tiene conexión oficial con nuestro programa, pero nos ha ayudado de forma importante. Por esta ayuda, agradecemos en particular a los directores sucesivos del Departamento de Física, August C. Helmholtz y Burton J. Moyer; al claustro y miembros no académicos del Departamento; Donald Coney, y muchos otros de la Universidad. Abraham Olshen nos ayudó mucho en los primeros problemas de organización.

Las correcciones y sugerencias serán siempre bien recibidas.

Eugene D. Commins
 Frank S. Crawford, Jr.
 Walter D. Knight
 Philip Morrison
 Alan M. Portis
 Edward M. Purcell
 Frederick Reif
 Malvin A. Ruderman
 Eyvind H. Wichmann
 Charles Kittel, *Director*

Berkeley, California

Índice analítico

Prólogo a la segunda edición del volumen II	V
Prólogo a la primera edición del volumen II	VII
Prólogo al Berkeley Physics Course	IX

<i>Capítulo 1</i>	Electrostática: cargas y campos	1
-------------------	--	----------

1.1	Carga eléctrica	2
1.2	Conservación de la carga	4
1.3	Cuantización de la carga	5
1.4	Ley de Coulomb	7
1.5	Energía de un sistema de cargas	11
1.6	Energía eléctrica en una red cristalina	14
1.7	El campo eléctrico	16
1.8	Distribución de cargas	20
1.9	Flujo	22
1.10	Ley de Gauss	23
1.11	Campo de una distribución esférica de carga	26
1.12	Campo de una carga lineal	27
1.13	Campo de una distribución de carga plana e indefinida	28
1.14	Fuerza sobre una capa de carga	29
1.15	Energía asociada a un campo eléctrico	32
	Problemas	34

Capítulo 2	Potencial eléctrico	41
2.1	Integral curvilínea del campo eléctrico	42
2.2	Diferencia de potencial y función potencial	44
2.3	Gradiente de una función escalar	45
2.4	Deducción del campo a partir del potencial	47
2.5	Potencial de una distribución de cargas	48
	Potencial de dos cargas puntiformes	48
	Potencial de un hilo largo cargado	49
2.6	Disco cargado uniformemente	49
2.7	Divergencia de una función vectorial	55
2.8	Teorema de Gauss y forma diferencial de la ley de Gauss	56
2.9	La divergencia en coordenadas cartesianas	57
2.10	Laplaciana	61
2.11	Ecuación de Laplace	62
2.12	Distinción entre la Física y las Matemáticas	63
2.13	Rotacional de una función vectorial	65
2.14	Teorema de Stokes	68
2.15	El rotacional en coordenadas cartesianas	69
2.16	Significado físico del rotacional	72
	Problemas	76
Capítulo 3	Campo eléctrico en los conductores	83
3.1	Conductores y aisladores	84
3.2	Conductores en el campo electrostático	85
3.3	Problema electrostático general: Teorema de unicidad	91
3.4	Algunos sistemas simples de conductores	94
3.5	Capacidad y condensadores	100
3.6	Potenciales y cargas en varios conductores	104
3.7	Energía almacenada en un condensador	106
3.8	Otros puntos de vista de los problemas de contorno	108
	Problemas	110
Capítulo 4	Corrientes eléctricas	117
4.1	Corriente eléctrica y densidad de corriente	118
4.2	Corrientes estacionarias y conservación de la carga	120
4.3	Conductividad eléctrica y ley de Ohm	122
4.4	La física de la conducción eléctrica	127
4.5	Conducción en los metales	137
4.6	Semiconductores	139
4.7	Circuitos y elementos de circuito	143
4.8	Disipación de energía en la circulación de corriente	148
4.9	Fuerza electromotriz y pilas voltaicas	149
4.10	Redes con fuentes de voltaje	152
4.11	Corrientes variables en condensadores y resistencias	154
	Problemas	156

Capítulo 5 Campos de cargas móviles 163

- 5.1 De Oersted a Einstein 164
- 5.2 Fuerzas magnéticas 166
- 5.3 Medida de carga en movimiento 168
- 5.4 Invariancia de la carga 170
- 5.5 Medida del campo eléctrico en distintos sistemas de referencia 173
- 5.6 Campo de una carga puntiforme que se mueve con velocidad constante 176
- 5.7 Campo de una carga que arranca o para 181
- 5.8 Fuerza sobre una carga móvil 185
- 5.9 Interacción entre una carga móvil y otras cargas móviles 188
- Problemas 195

Capítulo 6 El campo magnético 201

- 6.1 Definición de campo magnético 202
- 6.2 Algunas propiedades del campo magnético 208
- 6.3 Potencial vector 213
- 6.4 Campo de cualquier corriente que recorre un hilo 218
- 6.5 Campos de espiras y bobinas 220
- 6.6 Variación de $\mathbf{B}$ en una lámina de corriente 225
- 6.7 Cómo se transforman los campos 228
- 6.8 Experimento de Rowland 234
- 6.9 Conducción eléctrica en un campo magnético.
 - Efecto Hall 235
 - Problemas 240

Capítulo 7 Inducción electromagnética 247

- 7.1 Descubrimiento de Faraday 248
- 7.2 Una varilla conductora se mueve a través de un campo magnético uniforme 250
- 7.3 Una espira se mueve a través de un campo magnético no uniforme 253
- 7.4 Una espira estacionaria con la fuente del campo móvil 260
- 7.5 Una ley universal de la inducción 262
- 7.6 Inducción mutua 268
- 7.7 Un teorema de “reciprocidad” 271
- 7.8 Autoinducción 273
- 7.9 Un circuito que contiene autoinducción 274
- 7.10 Energía almacenada en el campo magnético 276
- Problemas 278

Capítulo 8	Circuitos de corriente alterna	287
8.1	Un circuito resonante	288
8.2	Corriente alterna	293
8.3	Redes de corriente alterna	300
8.4	Admitancia e impedancia	302
8.5	Potencia y energía en circuitos de corriente alterna	305
	Problemas	309
Capítulo 9	Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas	313
9.1	“Algo se ha omitido”	314
9.2	Corriente de desplazamiento	318
9.3	Ecuaciones de Maxwell	320
9.4	Una onda electromagnética	322
9.5	Otras formas de onda; superposición de ondas	325
9.6	Energía transportada por ondas electromagnéticas	330
9.7	Cómo se contempla una onda en una referencia distinta	332
	Problemas	334
Capítulo 10	Campos eléctricos en la materia	337
10.1	Dieléctricos	338
10.2	Momentos de una distribución de carga	342
10.3	Potencial y campo de un dipolo	345
10.4	Par y fuerza sobre un dipolo en un campo exterior	348
10.5	Dipolos atómicos y moleculares; momentos dipolares inducidos	350
10.6	Momentos dipolares permanentes	353
10.7	Campo eléctrico debido a la materia polarizada	356
10.8	Otro aspecto del condensador	361
10.9	Campo de una esfera polarizada	364
10.10	Esfera dieléctrica en un campo uniforme	368
10.11	Campo de una carga en un medio dieléctrico y ley de Gauss	369
10.12	Punto de vista microscópico del dieléctrico	373
10.13	Polarización en campos variables	376
10.14	Corriente de la carga ligada	378
10.15	Una onda electromagnética en un dieléctrico	380
	Problemas	382
Capítulo 11	Campos magnéticos en la materia	387
11.1	Cómo responden distintas sustancias al campo magnético	388

Índice analítico

11.2	Ausencia de “carga” magnética	393
11.3	Campo de la corriente de una espira	396
11.4	Fuerza sobre un dipolo en un campo externo	402
11.5	Corrientes eléctricas en los átomos	404
11.6	Spin y momento magnético del electrón	410
11.7	Susceptibilidad magnética	413
11.8	Campo magnético creado por la materia imanada	415
11.9	Campo de un imán permanente	420
11.10	Corrientes libres y el campo H	423
11.11	Ferromagnetismo	428
	Problemas	434
<i>Apéndice A</i>	Breve resumen de la relatividad restringida	441
<i>Apéndice B</i>	Radiación de una carga acelerada	449
<i>Apéndice C</i>	Superconductividad	455
<i>Apéndice D</i>	Resonancia magnética	459
<i>Apéndice E</i>	Relaciones exactas entre las unidades SI y CGS	463
Índice alfabético		467

1

Electrostática: cargas y campos

1.1	Carga eléctrica	2
1.2	Conservación de la carga	4
1.3	Cuantización de la carga	5
1.4	Ley de Coulomb	7
1.5	Energía de un sistema de cargas	11
1.6	Energía eléctrica en una red cristalina	14
1.7	El campo eléctrico	16
1.8	Distribución de cargas	20
1.9	Flujo	22
1.10	Ley de Gauss	23
1.11	Campo de una distribución esférica de carga	26
1.12	Campo de una carga lineal	27
1.13	Campo de una distribución de carga plana e indefinida	28
1.14	Fuerza sobre una capa de carga	29
1.15	Energía asociada a un campo eléctrico	32
	Problemas	34

1.1 Carga eléctrica

La electricidad apareció a sus primeros investigadores como un fenómeno extraordinario. Sacar de los cuerpos el *fuego sutil*, como se llamó en otro tiempo, conducir un cuerpo a un estado muy electrizado, producir un flujo estacionario de corriente, requería medios ingeniosos. Exceptuando el espectáculo de un relámpago, las manifestaciones corrientes de la naturaleza, desde la congelación del agua al crecimiento de un árbol, no parecían tener relación con el curioso comportamiento de los cuerpos electrizados. Actualmente sabemos que las fuerzas eléctricas determinan en gran parte las propiedades físicas y químicas de la materia en todo el dominio desde el átomo a la célula viva. Por este conocimiento, tenemos que agradecer, tanto a los científicos del siglo XIX, Ampère, Faraday, Maxwell, y algunos otros, quienes descubrieron la naturaleza del electromagnetismo, como a los físicos y químicos del siglo veinte los cuales explicaron la estructura atómica de la materia.

El electromagnetismo clásico trata de las cargas y corrientes eléctricas y sus interacciones, como si todas las magnitudes que intervienen pudieran medirse independientemente con precisión ilimitada. En este caso, *clásico* sólo significa «no-cuántico». En la teoría clásica del electromagnetismo se ignora la ley cuántica con su constante h , tal como ocurre en la mecánica ordinaria. En realidad la teoría clásica había llegado casi a su estado presente de desarrollo antes del descubrimiento de Planck. Ha sobrevivido extraordinariamente. Ni la revolución de la física cuántica ni el desarrollo de la relatividad restringida empañaron el esplendor de las ecuaciones del campo electromagnético que Maxwell consigné hace unos cien años.

Desde luego, la teoría estaba sólidamente basada en la experiencia, y a causa de ello estaba bien firme dentro de su ámbito original de aplicaciones — para bobinas, condensadores, corrientes oscilantes, llegando hasta las ondas de radio y ondas luminosas. Pero incluso un éxito tan grande no permite asegurar su validez en otro dominio, por ejemplo, en el interior de una molécula.

Dos hechos ayudan a explicar la persistente importancia en la física moderna de la descripción clásica del electromagnetismo. Primero, la relatividad restringida no requería revisión del electromagnetismo clásico. Históricamente hablando, la relatividad restringida surgió de la teoría electromagnética clásica y de experimentos inspirados por ella. Las ecuaciones de Maxwell, desarrolladas mucho antes que los trabajos de Lorentz y Einstein, demostraron ser totalmente compatibles con la relatividad. Segundo, las modificaciones cuánticas resultan ser poco importantes hasta distancias menores que 10^{-10} cm, un centenar de veces menor que el átomo. Podemos explicar la repulsión y atracción de partículas en el átomo utilizando las mismas leyes que aplicamos a las hojas de un electroscope, aunque necesitamos la mecánica cuántica para predecir cómo se comportarán las partículas bajo la acción de aquellas fuerzas. Para distancias aún

más pequeñas, hay una fusión afortunada de la teoría electromagnética y la teoría cuántica, llamada *electrodinámica cuántica*, la cual parece estar de acuerdo con la experiencia para las distancias más pequeñas exploradas hasta ahora.

Suponemos al lector familiarizado con los hechos elementales de la electricidad. No vamos a examinar todos los experimentos que pusieron de manifiesto la existencia de la carga eléctrica, o la evidencia de la constitución eléctrica de la materia. Por otro lado, necesitamos examinar cuidadosamente los fundamentos experimentales de las leyes básicas de los cuales dependen todos los otros. En este capítulo estudiaremos la física de las cargas eléctricas estacionarias: la *electrostática*.

Sin duda una propiedad fundamental de la carga eléctrica es su existencia en las dos variedades que desde hace tiempo se llaman positiva y negativa. El hecho observado es que todas las partículas cargadas pueden dividirse en dos clases tales que todos los miembros de una clase se repelen entre sí, mientras que atraen a los miembros de la otra clase. Si dos cuerpos pequeños *A* y *B* cargados eléctricamente, separados cierta distancia, se atraen entre sí, y si *A* atrae a un tercer cuerpo electrizado *C*, siempre encontraremos que *B* repele a *C*. Esto contrasta con la gravitación: solamente existe una sola clase de masa gravitatoria, y toda masa atrae a cualquier otra.

Pueden considerarse las dos clases de carga, positiva y negativa como manifestaciones opuestas de cierta cualidad, tal como *derecha* e *izquierda* son dos clases de «mano». En realidad en la física de las partículas elementales, las cuestiones donde interviene el signo de la carga a veces están ligadas a cuestiones de «mano», y para otra simetría básica, la relación de una secuencia de sucesos, *a* luego *b*, luego *c*, a la secuencia inversa temporalmente *c*, luego *b*, luego *a*. Lo que ahora nos interesa es la dualidad de la carga eléctrica. Para cada clase de partícula en la naturaleza, como hasta ahora conocemos, puede existir una *antipartícula*, una especie de «imagen especular» eléctrica. La antipartícula lleva carga de signo opuesto. Si cualquier otra cualidad intrínseca de la partícula tiene un opuesto, la antipartícula igualmente la tiene, mientras que en una propiedad que no admite opuesto, tal como la masa, la antipartícula y la partícula son exactamente iguales. La carga del electrón es negativa; su antipartícula, llamada *positrón*, tiene carga positiva, pero su masa es precisamente la misma que la del electrón. La antipartícula del protón se llama simplemente *antiprotón*; su carga eléctrica es negativa. Un electrón y un protón se combinan para formar un átomo de hidrógeno ordinario. Un positrón y un antiprotón podrían combinarse de la misma manera para formar un átomo de antihidrógeno. Dando los materiales de construcción positrones, antiprotones y antineutrones*, puede construirse el conjunto de la antimateria, desde el antihidrógeno a las antigalaxias. Por supuesto que hay una dificultad práctica.

* Aunque la carga eléctrica es nula, el neutrón y su antipartícula no son intercambiables. Ciertas propiedades, que aquí no nos interesan, son opuestas.

Si el positrón se encuentra con un electrón, o un antiprotón encuentra un protón, este par de partículas se desvanece rápidamente en un estallido de radiación. Por esto no es sorprendente que incluso positrones y antiprotones, sin hablar de antiátomos, son extraordinariamente raros y de corta vida en nuestro mundo. Quizá el universo contenga, en alguna parte, una vasta concentración de antimateria. Si es así, su paradero es un misterio cosmológico.

El universo en torno nuestro consta abrumadoramente de materia, no de antimateria. Así que digamos que los portadores abundantes de carga negativa son electrones, y los portadores abundantes de carga positiva son protones. El protón es, aproximadamente, 2000 veces más pesado que el electrón y muy diferente, además, en algunos otros aspectos. Así que la materia a nivel atómico incorpora electricidad negativa y positiva de maneras completamente diferentes. La carga positiva está toda en el núcleo atómico, limitada dentro de una estructura maciza de tamaño no superior a los 10^{-12} cm, mientras que la carga negativa está dispersa a lo largo de una región de dimensiones cerca de 10^4 veces mayor. Es difícil imaginar que átomos y moléculas —en toda la química— serían iguales si no fuese por esta asimetría eléctrica fundamental de la materia.

La carga que llamamos negativa lo mismo también podíamos haberla llamado positiva. El nombre fue un accidente histórico. No hay nada esencialmente negativo en la carga de un electrón. No es como un entero negativo. Un entero negativo, una vez se ha definido la multiplicación, difiere esencialmente de un entero positivo en que su cuadrado es un entero de signo opuesto. Pero el producto de dos cargas no es una carga; no hay comparación.

Otras dos propiedades observadas de la carga eléctrica son esenciales en la estructura eléctrica de la materia: la carga se *conserva* y la carga está *cuantizada*. Estas propiedades implican *cantidad* de carga, y así entraña una medida de la carga. En breve indicaremos cómo pueden medirse las cargas situadas a cierta distancia en función de la fuerza entre ellas. Pero tomemos esto de momento como convenio, con lo que podemos hablar libremente acerca de estos hechos fundamentales.

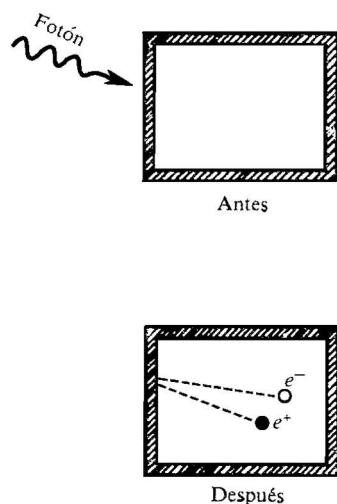


Fig. 1.1 Se crean a pares partículas cargadas, con cargas iguales y opuestas.

1.2 Conservación de la carga

La carga total en un sistema aislado nunca varía. Entendemos por sistema *aislado* aquél en donde no está permitido que la materia atraviese sus límites. Podríamos dejar entrar o salir luz del sistema sin afectar el principio, ya que los fotones no transportan carga. Por ejemplo, una caja situada en el vacío, de paredes delgadas, expuesta a rayos gamma, podría ser el escenario de la «creación de un par» suceso en el cual un fotón de alta energía termina su existencia con la creación de un electrón negativo y un electrón positivo (Fig. 1.1). Se han creado dos partículas cargadas eléctricamente pero la variación de la carga total dentro y en la caja es nula. Un hecho que infringiría la ley que acabamos de establecer sería la creación de una partícula

cargada positivamente *sin* la simultánea creación de una partícula cargada negativamente. Tal acontecimiento no se ha observado nunca.

Por supuesto, si las cargas eléctricas del electrón y del positrón no fueran exactamente iguales en magnitud la creación del par violaría la ley estricta de la conservación de la carga. También se determina experimentalmente que sus cargas *son* iguales. Una prueba experimental interesante la proporciona la estructura llamada *positronio*, una estructura compuesta nada más que por un electrón y un positrón. Este curioso « átomo » puede existir lo suficiente — algo así como una décima de microsegundo — para que pueda estudiarse con detalle. Se comporta como si fuese completamente neutro. Actualmente, la mayoría de físicos se mostrarían estupefactos, por no decir incrédulos, si se hallara *alguna* diferencia en las magnitudes de estas cargas, pues sabemos que el electrón y el positrón están relacionados entre sí como *partícula* a *antipartícula*. Su exacta igualdad de carga, como su igualdad de masa, son la manifestación de una evidente simetría universal en la naturaleza, la dualidad partícula-antipartícula. Podríamos preguntarnos si la conservación de la carga es meramente un corolario de alguna ley más amplia de conservación que rigiera la creación y aniquilación de las partículas; o si la conservación de la carga es un requerimiento primario, con el cual las otras leyes tienen que caer dentro de sus límites. O si tienen sentido estas cuestiones. No lo sabemos con toda seguridad.

Una cosa se aclarará en el curso de nuestro estudio del electromagnetismo: la no conservación de la carga sería incompatible con la estructura de nuestra teoría electromagnética actual. Por esto podemos establecer la *ley de conservación de la carga* como postulado de la teoría o como ley empírica confirmada sin excepción por todas las observaciones realizadas hasta ahora:

La carga eléctrica total en un sistema aislado, es decir, la suma algebraica de la carga positiva y negativa presente en cierto instante, no varía nunca.

Tarde o temprano deberemos preguntar si esta ley satisface la prueba de la invariancia relativista. Pospondremos hasta el Cap. 5 el estudio completo de esta importante cuestión. Sin embargo, la contestación es que la satisface, y no simplemente en el sentido que lo establecido anteriormente se cumple en cualquier sistema de referencia inercial, sino en el sentido más firme que observadores en diferentes sistemas de referencia, midiendo la carga, obtienen el mismo número. En otras palabras, la carga eléctrica total de un sistema aislado es un número relativísticamente invariante.

1.3 Cuantización de la carga

Las cargas eléctricas que hallamos en la naturaleza son múltiplos de solamente una magnitud, igual a la carga que lleva el electrón. Denotamos la magnitud de esta carga por e . (Cuando debamos tener en cuenta el signo, escribiremos $-e$ para la carga del mismo

electrón.) Ya hemos señalado que la carga que lleva el positrón es precisamente ésta. Como debe conservarse la carga, cuando un electrón y un positrón se aniquilan no dejan nada salvo luz. Lo que parece más notable es la evidente igualdad de las cargas que llevan otras partículas cargadas —la igualdad, por ejemplo, de la carga positiva en el protón y la negativa en el electrón.

Esta particular igualdad es fácil comprobarla experimentalmente. Podemos ver si la carga neta en una molécula de hidrógeno, que consta de dos protones y dos electrones, es nula. En un experimento realizado por J. G. King* se comprimió gas hidrógeno en un tanque perfectamente aislado. El tanque contenía unas 5×10^{24} moléculas (aproximadamente 17 gramos) de hidrógeno. Se dejaba escapar el gas del recipiente de manera que se impidiera la fuga de cualquier ion (una molécula con un electrón omitido o un electrón suplementario asignado). Si la carga del electrón difiriera de la del protón en, por ejemplo, una parte en 10^9 , cada molécula de hidrógeno tendría una carga de $2 \times 10^{-9}e$, y la salida de toda la masa de hidrógeno alteraría la carga del tanque en $10^{16}e$, un efecto gigantesco. En realidad, el experimento podría haber revelado una cantidad residual tan pequeña como $2 \times 10^{-20}e$, y nada se observó. Esto prueba que el protón y el electrón no difieren en el valor de la carga en más del uno por 10^{20} .

Quizá la igualdad es realmente *exacta* por alguna razón que hasta ahora no comprendemos. Puede conectarse con la posibilidad, sugerida por recientes teorías, que un protón puede, *muy* raramente, desintegrarse en un positrón y cierta partícula neutra. Si esto ocurriera, incluso la más ligera discrepancia entre la carga del protón y la del positrón violaría la conservación de la carga. Varios experimentos diseñados para detectar la desintegración del protón, no han registrado con certeza una sola desintegración hasta ahora; esto está escrito en 1983.

Si esto se llega a observar, y se demuestra la exacta igualdad del valor de la carga del protón y la del electrón (la antipartícula del positrón) podrá considerarse como un corolario de la ley más general de la conservación de la carga.

Sin embargo, ahora existe abrumadora evidencia de que la estructura *interna* de todas las partículas que interactúan fuertemente llamadas *hadrones* —una clase que incluye el protón y el neutrón— implican unidades básicas llamadas *quarks*, cuyas cargas eléctricas son múltiplos de $e/3$. El protón, por ejemplo, está constituido por tres quarks, dos de carga $2e/3$ y uno con carga $-1e/3$. El neutrón contiene un quark de carga $2e/3$ y dos quarks con carga $-1e/3$.

Varios experimentadores han buscado quarks aislados, tanto libres como ligados a la materia ordinaria. La carga fraccionaria de

* J. G. King, *Phys. Rev. Letters* **5**, 562 (1960). Se hallarán referencias, para pruebas previas de igualdad de carga, en este artículo y en el capítulo de V. W. Hughes en *Gravitation and Relativity*, editado por H. Y. Chiu y W. F. Hoffman (W. A. Benjamin, Inc., Nueva York, 1964), cap. 13.

tales quarks, ya que no puede neutralizarse con ningún número de electrones o protones, traicionaría la presencia de los quarks. Hasta ahora, no se han identificado de manera concluyente partículas con carga fraccionaria. Hay bases teóricas para sospechar que la liberación de un quark de un hadrón es imposible, pero la cuestión, hasta ahora, permanece abierta.

Por descontado, la cuantización de la carga sale fuera del radio de acción del electromagnetismo clásico. Generalmente lo ignoraremos, y actuaremos como si nuestra carga puntiforme q pueda tener cualquier valor. Esto no causará perturbación alguna. Sin embargo, es importante recordar que no podemos esperar que la teoría clásica explique la estructura de las partículas elementales. (No es cierto que la teoría cuántica actual lo pueda!) Lo que mantiene unido al electrón es tan misterioso como lo que fija el valor preciso de su carga. Deben considerarse algo más que las fuerzas eléctricas, para las fuerzas electrostáticas entre las distintas partes del electrón, que serían repulsivas.

En nuestro estudio de la electricidad y magnetismo consideraremos las partículas cargadas simplemente como portadores de cargas, con dimensiones tan pequeñas que su tamaño y estructura es, en la mayoría de los casos, insignificante. En el caso del protón, por ejemplo, sabemos a partir de los experimentos de difusión de alta energía que la carga eléctrica no se manifiesta apreciablemente más allá de un radio de 10^{-15} m. Sabemos del análisis de Rutherford acerca de la difusión de partículas alfa que incluso los núcleos pesados tienen su carga eléctrica distribuida en una región inferior a 10^{-13} m. Para el físico del siglo diecinueve, una «carga puntiforme» era una noción abstracta. Hoy en día estamos familiarizados con las partículas atómicas. La naturaleza granular de la electricidad es tan conspicua en nuestra descripción moderna de la naturaleza que encontramos que una carga puntiforme es una idealización menos artificial que una distribución continua variable de la densidad de carga. Cuando postulamos tales distribuciones continuas de carga podemos considerarlas como valores medios de un gran número de cargas elementales de la misma forma que podemos definir la densidad macroscópica de un líquido a pesar de su discontinuidad a escala molecular. En los cuerpos mucho mayores que las gotas de aceite de Millikan la cuantización de la carga no es apreciable.

1.4 Ley de Coulomb

Sabido es que la interacción entre cargas eléctricas en reposo se explica por la ley de Coulomb: Dos cargas eléctricas estacionarias se repelen o atraen entre sí con una fuerza proporcional al valor de las cargas e inversamente proporcional a su distancia mutua.

Podemos expresarla abreviadamente en forma vectorial:

$$\mathbf{F}_2 = k \frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2} \quad (1)$$

Aquí q_1 y q_2 son números (escalares) que dan el valor y signo de las cargas respectivas, $\hat{r}_{21}$ es el vector unitario en la dirección * de la carga 1 a la carga 2, y $\mathbf{F}_2$ es la fuerza que actúa sobre la carga 2. Así pues la Ec. (1) expresa, entre otras cosas, el hecho de que cargas iguales se repelen y las distintas se atraen, y que la fuerza es Newtoniana; es decir, $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

El vector unitario $\hat{r}_{21}$ indica que la fuerza es paralela a la recta que une las cargas. No podría ser de otro modo a menos que el mismo espacio tenga alguna propiedad direccional constitucional, pues dos cargas puntiformes solitarias en un espacio vacío e isótropo, no podrían particularizar ninguna otra dirección.

Si la «carga puntiforme» tuviese cierta estructura interna, con un eje definiendo una dirección, tendría que determinarse por algo más que una simple magnitud escalar q . Es cierto que algunas partículas elementales, incluido el electrón, poseen otra propiedad, llamada *spin*. Éste da lugar a una fuerza magnética entre dos electrones, sumada a su repulsión electrostática. Esta fuerza magnética, en general, no actúa en la dirección de la línea que une las dos partículas. Disminuye con el inverso de la cuarta potencia de la distancia, y a distancias atómicas de unos 10^{-8} cm la fuerza de Coulomb es alrededor de 10^4 más fuerte que la interacción magnética de los spins. Si las cargas se mueven aparece otra fuerza magnética —de aquí la restricción a cargas estacionarias en nuestra exposición de la ley de Coulomb—. Volveremos a estos fenómenos magnéticos en capítulos posteriores.

Al escribir la Ec. 1 suponemos que ambas cargas están bien localizadas, ocupando pequeñas regiones comparadas con r_{21} ; si no es así, r_{21} no puede definirse con precisión.

El valor de la constante k en la Ec. 1 depende del sistema de unidades en las que se expresen r , $\mathbf{F}$ y q . En el SI r se mide en metros, $\mathbf{F}$ en newton y la carga q en coulomb. El metro y el newton son unidades básicas, pero el coulomb es unidad derivada, 1 coulomb = 1 ampere $\times$ segundo. En función de las unidades básicas k vendrá en función de m , N y A . No obstante, se prefiere escribir $k = 1/4\pi\epsilon_0$ (sistema racionalizado) con lo que la Ec. 1 se escribe

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \hat{r}_{21}}{r_{21}^2} \quad (1')$$

Si queremos expresar ϵ_0 en función de m , N , A deberemos tener en cuenta la Ec. 7 del capítulo 6 (6.1, pág. 205), en donde se da la fuerza entre conductores paralelos en las condiciones precisas para la definición del ampere. En esta ecuación aparece la constante μ_0 que en la XI C.G.P.M. (1960) se acordó tomar $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m y de aquí la definición de ampere.

Ahora bien, en el estudio de las ondas electromagnéticas, capítulo 9, veremos que $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, siendo c la celeridad de la luz en el

* El convenio adoptado puede no parecer natural, pero está más de acuerdo con el uso en otras partes de la física y procuraremos seguirlo en este libro.

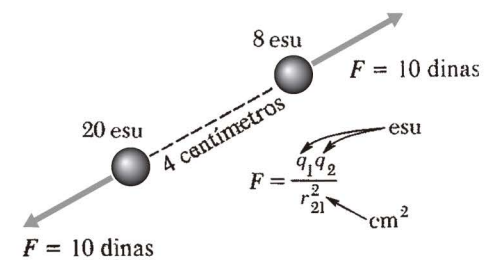
vacío, con lo que $\epsilon_0 = 1/4\pi \times 10^{-7} c^2$. En el Apéndice E se da el valor exacto de ϵ_0 ; para nuestros fines son suficientemente precisas las relaciones $k = 9 \times 10^9$ y $\epsilon_0 = 1/36\pi \times 10^9 c^2/N \times m^2$, en donde hemos tomado el valor aproximado de $c = 3 \times 10^8$ m/s.

El único medio que tenemos de detectar y medir cargas eléctricas es observar la interacción de cuerpos cargados. Podría preguntarse qué parte del contenido manifiesto de la ley de Coulomb es realmente sólo definición. Como ella establece, el significado físico es la expresión de la dependencia inversa del cuadrado y la deducción de que la carga eléctrica es *aditiva* en su efecto. Para poner de relieve esto último debemos considerar *más* de dos cargas. Puesto que si en el mundo existieran solamente dos cargas q_1 y q_2 con las que experimentar, nunca podríamos medirlas por separado. Únicamente podríamos comprobar que F es proporcional a $1/r_{12}^2$. Supongamos que tenemos *tres* cuerpos que poseen las cargas q_1 , q_2 y q_3 . Podemos medir la fuerza sobre q_1 cuando q_2 está a 10 cm de q_1 y q_3 está muy lejos, como en la Fig. 1.3a. A continuación podemos alejar q_2 y poner en su lugar a q_3 y medir de nuevo la fuerza sobre q_1 . Finalmente colocamos q_2 y q_3 muy próximas entre sí y a una distancia de 10 cm de q_1 . Midiendo la fuerza sobre q_1 vemos que es igual a la suma de las fuerzas previamente medidas. Este importante resultado, no podía predecirse por razonamientos lógicos a partir de la simetría, como hemos hecho anteriormente para demostrar que la fuerza entre dos cargas puntuiformes *tiene* que estar situada a lo largo de la recta que las une. *La fuerza con la cual dos cargas interactúan no se modifica por la presencia de una tercera carga.*

Sea cual fuere el número de cargas presentes en nuestro sistema, la ley de Coulomb (Ec. 1) puede utilizarse para calcular la interacción de cada par. Esto es la base de un principio de *superposición* el cual invocaremos muchas veces en nuestro estudio del electromagnetismo. La superposición significa combinar dos conjuntos de manantiales en un sistema añadiendo el segundo «sobre» el primero sin alterar su configuración. Este principio afirma que la fuerza sobre una carga colocada en un punto del sistema combinado será la suma vectorial de las fuerzas que cada conjunto de cargas, actuando por separado, ocasiona al actuar sobre la carga colocada en tal punto. Este principio no debe darse por supuesto a la ligera. Puede muy bien existir un dominio de fenómenos, donde intervengan distancias muy pequeñas o fuerzas muy intensas, en donde *no se cumpla* la superposición. En realidad, sabemos que los fenómenos cuánticos en el campo electromagnético representan un fracaso de la superposición, considerada desde el punto de vista de la teoría clásica.

Así pues la física de las interacciones eléctricas se presenta en completa perspectiva solamente cuando tenemos *más* de dos cargas. Podemos ir más allá de lo establecido explícitamente en la Ec. 1 y afirmar que con las tres cargas de la Fig. 1.3 ocupando posiciones cualesquiera, la fuerza sobre una de ellas, por ejemplo, la q_3 , está dada correctamente por esta ecuación:

$$\mathbf{F}_3 = \frac{q_3 q_1 \hat{r}_{31}}{r_{31}^2} + \frac{q_3 q_2 \hat{r}_{32}}{r_{32}^2} \quad (2)$$



$$\begin{aligned} 1 \text{ newton} &= 10^5 \text{ dinas} \\ 1 \text{ coulomb} &= 2.998 \times 10^9 \text{ esu} \\ e &= 4.802 \times 10^{-10} \text{ esu} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ coulomb} \end{aligned}$$

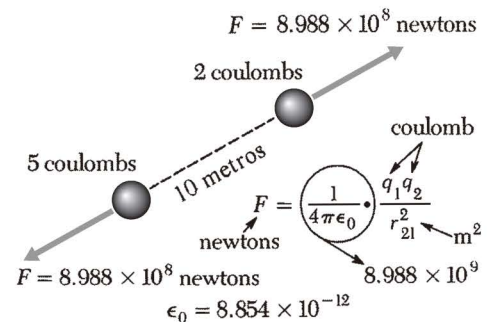


Fig. 1.2 La ley de Coulomb expresada en unidades SI. La constante ϵ_0 implica la celeridad de la luz, como veremos más adelante. En la figura hemos redondeado el valor de las constantes a 4 dígitos. En el Apéndice E se dan los valores precisos.

La comprobación experimental de la ley inversa del cuadrado, acerca de la atracción y repulsión eléctrica, tiene una curiosa historia. El mismo Coulomb enunció la ley en 1786 después de medir, con una balanza de torsión, la fuerza entre pequeñas esferas cargadas. Pero 20 años antes, Joseph Priestly, efectuando un experimento que le sugirió Benjamin Franklin, comprobó la ausencia de influencia eléctrica dentro de un recipiente hueco cargado e hizo una inspirada conjetura: «Podría inferir de este experimento que la atracción de la electricidad está sujeta a las mismas leyes que la gravitación y está por tanto de acuerdo al cuadrado de la distancia; ya que es fácil demostrar que si la tierra estuviese formada por una capa, un cuerpo en su interior no sería atraído por un lado más que por otro»*. La misma idea fue la base de un elegante experimento por Henry Cavendish, en 1772. Este cargó una capa esférica conductora que contenía en su interior, y temporalmente conectada a ella, una esfera más pequeña. La capa exterior se separó en dos mitades y retirada cuidadosamente, habiendo desconectado antes la esfera interior. Al comprobar la ausencia de carga en esta esfera, se confirmó la ley del inverso del cuadrado. Suponiendo que una desviación de la ley inversa del cuadrado pudiese expresarse como una diferencia en el exponente 2, por ejemplo $2 + \delta$, Cavendish concluyó que δ debe ser menor que 0,03. Este experimento de Cavendish permaneció largo tiempo desconocido hasta que Maxwell halló y publicó las notas de Cavendish un siglo más tarde (1876). Entonces Maxwell repitió el experimento con aparatos mejorados, disminuyendo el límite a $\delta < 10^{-6}$. Las últimas versiones modernas del experimento de Cavendish**, si se interpretan de la misma manera, dan el límite fantásticamente pequeño $\delta < 10^{-15}$.

Sin embargo, después de dos siglos de Cavendish, la cuestión de interés cambia algo. No importa cómo la ley de Coulomb se cumple perfectamente para objetos cargados en el laboratorio. ¿Hay un margen de distancias donde falle completamente? Hay dos dominios en cada uno de los cuales es presumible un fallo. El primero es en el dominio de distancias muy pequeñas, distancias menores que 10^{-14} cm, donde la teoría electromagnética sabemos que no puede aplicarse. A muy grandes distancias, digamos de las geográficas a las astronómicas, evidentemente no es posible una comprobación de la ley de Coulomb por el método de Cavendish. Sin embargo observamos ciertos fenómenos electromagnéticos a gran escala que prueban que las leyes del electromagnetismo clásico se cumplen a distancias muy grandes. Una de las pruebas más estrictas la proporcionan los campos magnéticos planetarios, en particular, el campo magnético del gran planeta Júpiter, suministrada por el Pioneer 10. Se analizó cuidadosamente la

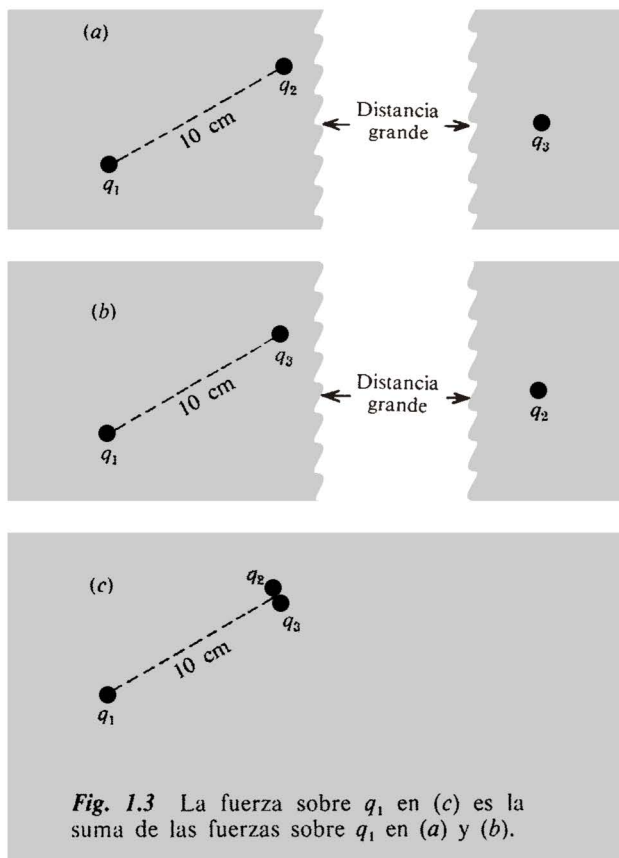


Fig. 1.3 La fuerza sobre q_1 en (c) es la suma de las fuerzas sobre q_1 en (a) y (b).

* Joseph Priestly, «The History and Present State of Electricity», vol. II, Londres, 1767.

** E. R. Williams, J. G. Faller y H. Hill. *Phys. Rev. Lett.* **26**:721 (1971).

variación espacial de este campo* y se halló que concuerda enteramente con la teoría clásica hasta distancias de al menos 10^5 kilómetros del planeta. Esto es equivalente a una comprobación, si bien indirecta, de la ley de Coulomb a gran distancia.

Para resumir, tenemos razones para confiar en la ley de Coulomb en el estupendo margen de 24 décadas en distancia, de 10^{-14} a 10^{10} cm, si no más lejos, y la tomaremos como base de nuestra descripción del electromagnetismo.

1.5 Energía de un sistema de cargas

En principio, lo único que tenemos para la electrostática es la ley de Coulomb. Dadas las cargas y sus posiciones podemos hallar todas las fuerzas electrostáticas. O bien, dado que las cargas también tienen libertad de moverse bajo la influencia de otro tipo de fuerzas, podemos hallar la posición de equilibrio en la cual la distribución de cargas permanecerá estacionaria. En el mismo sentido las leyes de Newton del movimiento son indispensables para la mecánica. Pero en ambos mecánica y electromagnetismo, alcanzamos fuerza y perspicacia introduciendo otros conceptos, el más notable es el de energía.

La energía es un concepto útil en nuestro caso a causa de que las fuerzas son *conservativas*. Consideremos primero el trabajo que debe cederse *al* sistema para conducir cuerpos cargados a una disposición particular. Empecemos con dos cuerpos cargados o dos partículas cargadas muy distantes entre sí, como se indica en la parte superior de la Fig. 1.4, cuyas cargas son q_1 y q_2 . Omitiremos cuál puede haber sido la energía necesaria para crear inicialmente estas dos concentraciones de carga. Acerquemos lentamente las partículas hasta que su distancia sea r_{12} . ¿Qué trabajo se requiere para esto?

No distinguimos si q_1 va hacia q_2 o al contrario. En cualquier caso el trabajo realizado es la integral del producto: fuerza por el desplazamiento en la dirección de la fuerza. La fuerza que se ha de aplicar para mover una carga hacia la otra es igual y de signo contrario a la fuerza culombiana.

$$W = \int \text{fuerza} \times \text{distancia} = \int_{r=\infty}^{r_{12}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (-dr)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (3)$$

Debido a que r varía desde ∞ a r_{12} , el incremento de desplazamiento es $-dr$. Sabemos que el trabajo efectuado sobre el sistema debe ser positivo para cargas del mismo signo; han de empujarse una hacia la otra. Con q_1 y q_2 en C y r_{12} en m, la Ec. 3 da el trabajo en J.

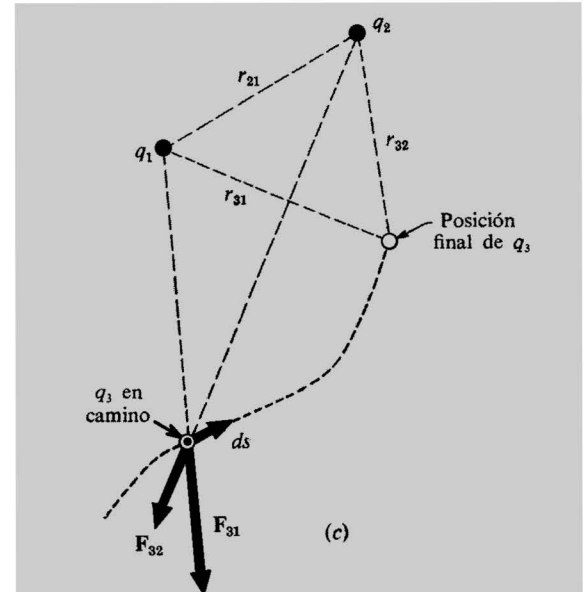
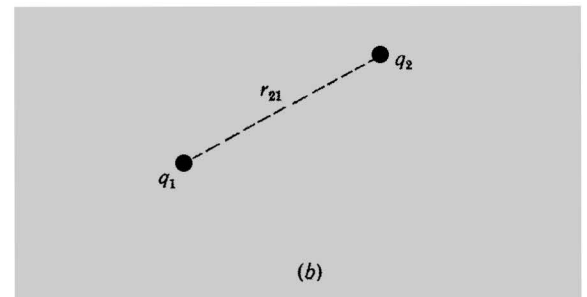
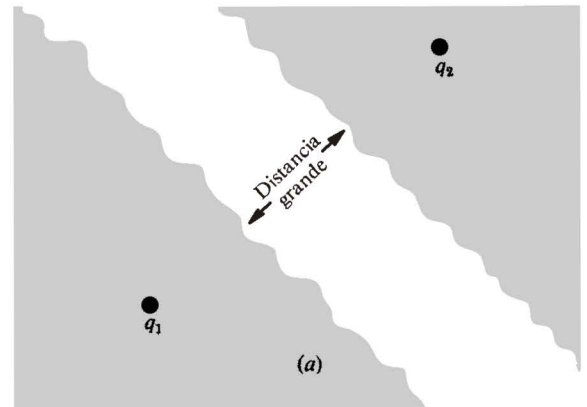


Fig. 1.4 Tres cargas se colocan próximas entre sí. Primero se trae q_2 ; luego, con q_1 y q_2 fijas, se trae q_3 .

* L. Davis, Jr., A. S. Goldhaber, M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **35**:1402 (1975). Para una revisión de la historia de la exploración del límite exterior del electromagnetismo clásico, véase A. S. Goldhaber y M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43**:277 (1971).

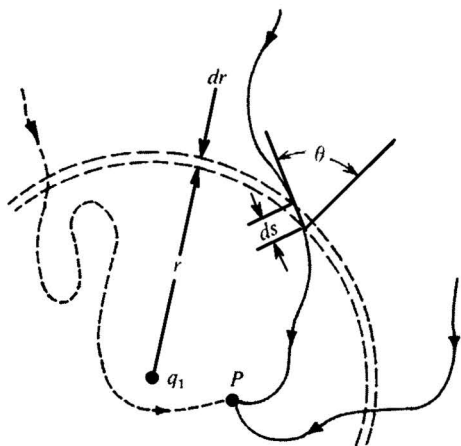


Fig. 1.5 Debido a que la fuerza es central, los tramos de diferentes caminos entre $r + dr$ y r requieren el mismo trabajo.

Este trabajo es el mismo sea cual fuere el camino de aproximación. Analicemos el razonamiento aplicado a las dos cargas q_1 y q_2 en la Fig. 1.5. Se mantiene a q_1 fija y trasladamos a q_2 a su posición final siguiendo dos caminos distintos. Ambos caminos deben atravesar la capa esférica indicada entre r y $r + dr$. El incremento de trabajo $-\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ correspondiente a esta porción de camino, es el mismo para los dos caminos*. El motivo es que $\mathbf{F}$ tiene el mismo módulo en ambas posiciones y está dirigida radialmente desde q_1 , a la vez que $ds = dr/\cos \theta$; de aquí que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F dr$. Cada incremento de trabajo a lo largo de un camino está apareado con el incremento correspondiente en el otro, así que la suma debe ser la misma. Nuestra conclusión se mantiene incluso para caminos recodados, como el camino de trazos en la Fig. 1.5. (¿Por qué?)

Volviendo a las dos cargas representadas en la Fig. 1.4, acerquemos una tercera carga q_3 desde un punto lejano trasladándola hasta un punto P_3 que dista r_{31} cm de la carga 1 y r_{32} cm de la carga 2. El trabajo requerido para ello será

$$W_3 = -\int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} \quad (4)$$

Gracias a la aditividad de las interacciones eléctricas, que ya hemos señalado,

$$-\int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} = -\int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{s} = -\int \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{s} - \int \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{s} \quad (5)$$

Es decir, el trabajo para llevar a q_3 a P_3 es la suma del trabajo necesario cuando solamente está presente q_1 y el necesario cuando está presente solamente q_2 .

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \right] \quad (6)$$

El trabajo total efectuado para reunir las tres cargas en esta posición, al cual llamaremos U , es por lo tanto

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right] \quad (7)$$

Observamos que q_1 , q_2 y q_3 aparecen simétricamente en la expresión anterior a pesar de que q_3 se colocó en último lugar. Habríamos obtenido el mismo resultado si colocásemos en primer lugar la q_3 . (Comprobarlo.) Por consiguiente U es independiente del orden de colocación de las cargas. Puesto que U también es independiente del camino

* Aquí usamos por vez primera el producto escalar de dos vectores; el producto escalar de dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, escrito $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, es el número $AB \cos \theta$. Siendo A y B los módulos de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y θ es el ángulo entre ellos. Expresado en función de las componentes cartesianas de los dos vectores, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.

seguido por cada carga, U dependerá únicamente de la disposición final de las cargas. Podemos llamarle *energía potencial eléctrica* de este sistema particular. Como siempre, existe cierta arbitrariedad en la definición de una energía potencial. En este caso hemos elegido como cero de energía potencial la correspondiente a la situación de las tres cargas, ya existentes, infinitamente alejadas una de otra. La energía potencial *conciene a la configuración en conjunto*. No hay manera de asignar, con toda propiedad, una fracción de ésta a una de las cargas.

Es evidente que este simple resultado puede generalizarse a cualquier número de cargas. Si tenemos N cargas distintas, en una distribución arbitraria en el espacio, la energía potencial del sistema se calcula sumando todos los productos binarios de cargas, como en la Ec. 7. El cero de energía potencial, como en aquel caso, es la que corresponde a todas las cargas muy alejadas.

Como ejemplo, calculemos la energía potencial de una distribución de ocho cargas negativas en los vértices de un cubo de arista b , con una carga positiva en el centro del cubo, como en la Fig. 1.6 a. Supongamos que cada carga negativa es un electrón con carga $-e$, mientras que la partícula central tiene una carga positiva doble: $2e$. Sumando los productos binarios, tenemos:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{8(-2e^2)}{(\sqrt{3}/2)b} + \frac{12e^2}{b} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}b} + \frac{4e^2}{\sqrt{3}b} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4,32e^2}{b} \quad (8)$$

La Fig. 1.6b muestra de donde procede cada término de dicha suma. La energía es positiva, lo que indica que el trabajo hubo de cederse al sistema para formarlo. Por descontado que este trabajo podría recuperarse si permitimos a las cargas moverse por separado, ejerciendo fuerzas sobre algún cuerpo o cuerpos exteriores. O bien si los electrones escapasen de su configuración, la *energía cinética total* de las partículas llegaría a ser igual a U . Lo dicho sería cierto si se separasen simultáneamente y simétricamente, o si se desprendiesen a la vez en cierto orden. Aquí vemos la importancia de esta simple noción de energía potencial total del sistema. Imaginemos el problema que representaría tener que calcular el vector fuerza resultante sobre cada partícula, en cada estado de la configuración. En este ejemplo, la simetría geométrica simplificaría la tarea; a pesar de esto sería mucho más complicado que el simple cálculo anterior.

Una manera de escribir la suma de productos binarios es:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j}^N \frac{q_j q_k}{r_{jk}} \quad (9)$$

La notación sumatorio doble, $\sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j}^N$, significa: Tomar $j = 1$ y sumar para $k = 2, 3, 4, \dots, N$; luego tomar $j = 2$ y sumar para $k = 1, 3, 4, \dots, N$; y así sucesivamente, hasta $j = N$. Evidentemente este método da

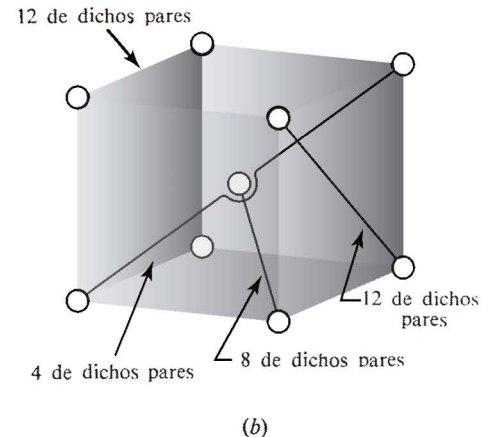
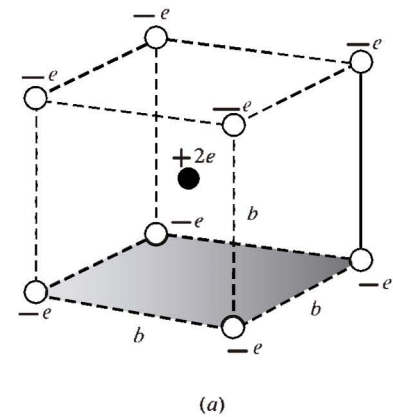
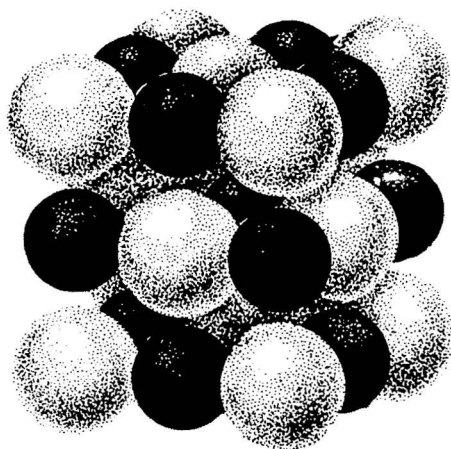
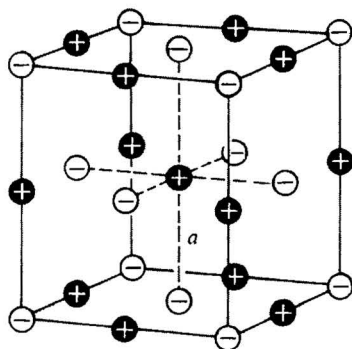


Fig. 1.6 (a) La energía potencial de esta distribución de nueve cargas puntiformes está dada por la Ec. 9. (b) En la suma intervienen cuatro tipos de pares.

lugar a que cada producto binario aparezca *dos veces*, para corregir este hecho multiplicamos por $\frac{1}{2}$.



(a)



(b)

Fig. 1.7 Porción de un cristal de cloruro sódico, con los iones Na^+ y Cl^- representados en las proporciones casi correctas (a), y sustituidos por cargas puntiformes equivalentes (b).

1.6 Energía eléctrica en una red cristalina

Estas ideas tienen una importante aplicación a la física de los cristales. Sabemos que un cristal iónico como el cloruro sódico puede representarse, con gran aproximación, por una distribución de iones positivos (Na^+) y negativos (Cl^-) alternando en una disposición regular tridimensional o red. En el cloruro sódico la disposición es la representada en la Fig. 1.7a. Por supuesto que los iones no son cargas puntiformes, sino que son distribuciones casi esféricas de carga y por lo tanto (como probaremos en breve) las fuerzas eléctricas ejercidas entre sí son las mismas que si cada ion fuese sustituido por una carga puntiforme equivalente en su centro. Este sistema eléctricamente equivalente lo representamos en la Fig. 1.7b. La energía potencial electrostática de la distribución de cargas en la red juega un importante papel en la explicación de la estabilidad y cohesión del cristal iónico. Veamos si podemos determinar su valor.

Desde luego, estamos enfrentados a una suma enorme, si no doblemente infinita, pues un cristal macroscópico contiene al menos 10^{20} átomos. ¿Convergerá la suma? Lo que deseamos hallar ahora es la energía potencial por unidad de volumen o de masa del cristal. Es de suponer que este valor sea independiente del tamaño del cristal, considerando que en un cristal macroscópico un extremo puede tener poca influencia sobre el otro. Dos gramos de cloruro sódico deben tener doble energía potencial que un gramo, no importando la forma si los átomos superficiales representan una pequeña fracción del número total de átomos. Nos *equivocaríamos* al suponer esto si el cristal estuviese constituido solamente por iones del mismo signo. En este caso, un gramo de cristal tendría una enorme carga eléctrica y se necesitaría una energía muy grande para unir los dos cristales citados para formar uno de dos gramos. (Podemos calcularla.) Se salva la situación por el hecho de que la estructura cristalina es una disposición alternada de cargas iguales y de signo contrario, así que una porción macroscópica de cristal es muy aproximadamente neutra.

Para evaluar la energía potencial observemos primero que cualquier ion positivo está en una posición equivalente a la de cualquier ion positivo. Además, aunque esto no es quizá inmediato a partir de la Fig. 1.7, la distribución de iones positivos alrededor de un ion negativo es exactamente la misma que la distribución de iones negativos en torno a un ion positivo, y así sucesivamente. Por lo tanto podemos tomar un ion de cualquier clase como centro, sumar *sus* interacciones con todos los demás, y multiplicar por el número total de iones de ambas clases. Esto reduce el sumatorio doble en la Ec. 9 a una simple suma y un factor N ; debemos mantener el factor $\frac{1}{2}$ para compensar el haber incluido cada par dos veces. Es decir, la energía

de una red de cloruro sódico compuesta por un número total de N iones es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} N \sum_{k=2}^N \frac{q_1 q_k}{r_{1k}} \quad (10)$$

Tomando el ion positivo en el centro como en la Fig. 1.7b, nuestra suma abarca todos sus vecinos próximos y lejanos. Los términos principales empiezan de la manera siguiente:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} N \left[-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right] \quad (11)$$

El primer término proviene de los seis iones cloro más próximos a la distancia a , el segundo, de los doce iones sodio sobre las aristas del cubo, y así sucesivamente. Es evidente que esta serie no converge *absolutamente*; si somos tan simples como para intentar sumar primero todos los términos positivos, esta suma divergería. Para calcular esta suma la distribuiríamos de manera que procedemos hacia el exterior, incluyendo siempre iones más distantes, los incluimos en grupos que representen capas de material casi neutras. Al interrumpir la suma, los iones más remotos que han sido despreciados serán como una mezcla de carga positiva y negativa a partes iguales, que podemos estar seguros de que su contribución será pequeña. Ésta es una manera simple de describir lo que es realmente un problema de cálculo más delicado. El cálculo numérico de una serie tal se realiza en nuestros días con un calculador electrónico. En este ejemplo, el resultado es:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-0,8738Ne^2}{a} \quad (12)$$

Aquí N , el número de iones, es el doble del número de moléculas de NaCl.

El signo negativo refleja el predominio de los vecinos más próximos e indica que debería *efectuarse* trabajo para separar el cristal en iones. En otras palabras, la energía eléctrica ayuda a explicar la cohesión del cristal. Sin embargo, si todo lo que ocurre fuera esto, el cristal se desmoronaría, pues la energía potencial de la distribución de cargas evidentemente *se reduce* por una disminución de todas las distancias. Encontramos de nuevo el dilema familiar de la física clásica — que es la no cuántica. Según las leyes clásicas, ningún sistema puede estar en equilibrio estable bajo la única acción de fuerzas eléctricas. ¿Esto

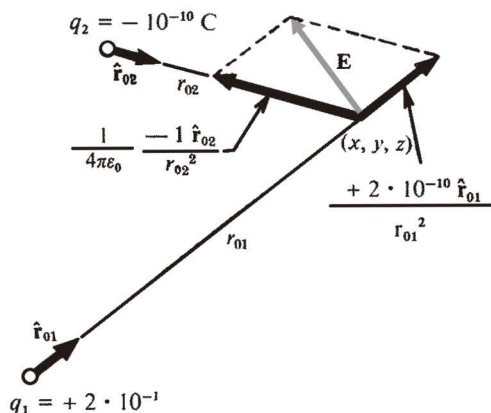


Fig. 1.8 El campo en un punto es la suma vectorial de los campos de cada una de las cargas del sistema.

1.7 El campo eléctrico

Supongamos que tenemos una distribución de cargas $q_1, q_2, \dots, q_N$, fijas en el espacio, y nos interesa, no las fuerzas que se ejercen mutuamente, sino su efecto sobre otra carga q_0 que puede situarse en sus proximidades. Sabemos cómo calcular la fuerza resultante sobre esta carga dada su posición, que podemos determinar por sus coordenadas x, y, z . La fuerza sobre la carga q_0 es:

$$\mathbf{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_0 q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2} \quad (13)$$

donde $\mathbf{r}_{0j}$ es el vector de origen de la carga j ésima en el sistema y extremo el punto (x, y, z) . La fuerza es proporcional a q_0 , así que si dividimos por q_0 obtenemos una magnitud vectorial que depende solamente de la estructura de nuestro sistema de cargas original $q_1, q_2, \dots, q_N$ y de la posición del punto (x, y, z) . A este vector función de x, y, z le llamamos *campo eléctrico* originado por las cargas $q_1, q_2, \dots, q_N$, y para él usamos el símbolo $\mathbf{E}$. A las cargas $q_1, q_2, \dots, q_N$ las llamamos *manantiales* del campo. Podemos tomar como definición del campo eléctrico $\mathbf{E}$ de una distribución de cargas, en el punto (x, y, z)

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2} \quad (14)$$

En la Fig. 1.8 se representa la suma vectorial del campo eléctrico de una carga puntiforme de $+2 \cdot 10^{-10}$ C con el campo de una carga puntiforme de -10^{-10} C, en un punto del espacio. En el sistema de unidades CGS, la intensidad del campo eléctrico se expresa en dinas por unidad de carga, es decir, dinas/ues. La intensidad del campo eléctrico $\mathbf{E}$ se expresa en newton/coulomb.

Después de la introducción del potencial eléctrico, en el próximo capítulo tendremos otra manera de expresar la unidad de intensidad del campo, y completamente equivalente, a saber, volt/metro.

Hasta aquí, nada tenemos realmente nuevo. El campo eléctrico es simplemente otra manera de describir el sistema de cargas; nos da la fuerza por unidad de carga, en módulo y dirección, que una carga de prueba q_0 experimentaría en cada punto. Hay que tener un poco de cuidado con esta interpretación. A menos que las cargas manantial sean realmente inmóviles, la introducción de cualquier carga finita q_0 puede ocasionar variación en las posiciones de las cargas

manantial, así que el propio campo definido por la Ec. 14 es distinto. Este es el motivo de suponer las cargas fijas al empezar nuestra exposición. A veces se define el campo exigiendo que q_0 sea una carga de prueba «infinitésima», siendo $\mathbf{E}$ el límite de $\mathbf{F}/q_0$ cuando $q_0 \rightarrow 0$. Toda impresión de rigor que esto pueda conferir es ilusoria. Recordemos que en el mundo real nunca se ha observado una carga menor que e . En realidad, si tomamos la Ec. 14 como nuestra *definición* de $\mathbf{E}$, sin referencia a una carga de prueba, no surgen problemas y no necesitamos que los manantiales sean fijos. Si la introducción de una nueva carga origina una variación en las cargas manantiales, en realidad hemos provocado un cambio en el campo eléctrico, y si deseamos determinar la fuerza sobre la nueva carga, deberemos usar el nuevo campo eléctrico para calcularla.

Quizá puede preguntarse ¿qué es un campo eléctrico? Es algo real, o es puramente un nombre para un factor en una ecuación que ha de multiplicarse por otro para dar el valor numérico de la fuerza que medimos en un experimento? Pueden ser interesantes dos observaciones. Primero, ya que trabaja no ocasiona diferencia. Ésta no es una contestación trivial sino muy sensata. Segundo, el hecho de que el vector campo eléctrico en un punto del espacio es todo lo que necesitamos conocer para predecir la fuerza que actuará sobre *cualquier* carga en este punto no es de ningún modo trivial. Podía haber sido de otra manera. Si no se hubiesen realizado experimentos, podríamos imaginar que en dos posiciones distintas en las cuales la unidad de carga experimentara la misma fuerza, cargas de prueba de valor 2 unidades podían experimentar fuerzas distintas, dependientes de la naturaleza de las otras cargas en el sistema. Si esto fuese cierto la descripción del campo no sería eficaz. El campo eléctrico asigna a cada punto en un sistema una *propiedad local*, en este sentido: Si conocemos $\mathbf{E}$ en una pequeña región, sabemos *sin ulterior averiguación*, lo que ocurrirá a cualquier carga en aquella región. No necesitamos conocer lo que produce el campo.

Para hacer visible un campo eléctrico necesitamos asociarle un vector, es decir, un módulo, dirección y sentido, en cada punto del espacio. En este libro utilizaremos varias representaciones esquemáticas del vector campo, ninguna de ellas completamente satisfactoria.

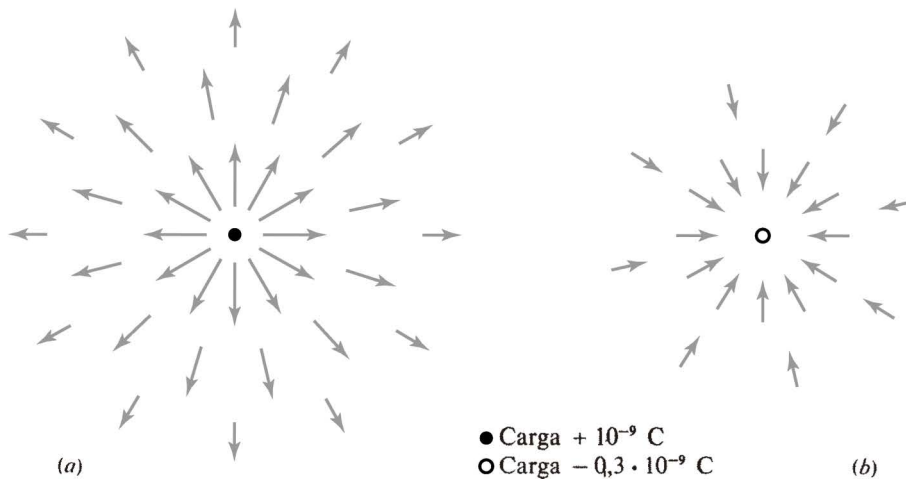
Es difícil dibujar en dos dimensiones la representación de una función vectorial en un espacio de tres dimensiones. Podemos indicar el módulo y dirección de $\mathbf{E}$ en varios puntos dibujando pequeñas flechas próximas a estos puntos, trazando las flechas más largas donde E sea más intenso*. Usando este esquema presentamos, en la Fig. 1.9a, el campo de una carga puntiforme aislada de $+10^{-9}$ C y en la Fig. 1.9b el campo de una carga puntiforme de $-0,3 \cdot 10^{-9}$ C. Estas

* Tal representación es tosca en el mejor de los casos. Es difícil indicar el punto del espacio en el cual se aplica un determinado valor del vector, y el dominio de valores de E es generalmente tan grande que es impracticable el tomar las longitudes de las flechas proporcionales a E .

representaciones no añaden nada a nuestro conocimiento del campo de una carga aislada; cualquiera puede imaginar un simple campo radial inverso del cuadrado sin la ayuda de una representación. Los dibujaremos en la Fig. 1.10 con objeto de combinar los dos campos, la cual indica al mismo tiempo el campo de las dos cargas separadas por una distancia a . Todo lo que representa esta figura es el campo en un plano que contiene las cargas. Para obtener una representación tridimensional completa debemos imaginar que la figura gira en torno del eje de simetría. En Fig. 1.10 existe un punto del espacio donde E es nulo. ¿A qué distancia debe estar de la carga más próxima? Observemos que hacia el borde del dibujo el campo está dirigido casi completamente hacia el exterior. Puede verse que a gran distancia de las cargas el campo se parece mucho al debido a una carga puntiforme positiva. Esto podría suponerse debido a que para puntos muy alejados la separación de las cargas no tiene mucha importancia, y lo que habría resultado al superponer nuestras dos cargas en un punto es una carga puntiforme de $0,7 \cdot 10^{-9}$ C.

Otra manera de representar un campo vectorial es dibujar las *líneas de campo*. Estas son líneas cuya tangente, en cualquier punto, tiene la dirección del campo en este punto. Tales líneas serán curvas continuas excepto en las singularidades tales como cargas puntiformes, o puntos tales como el citado en la Fig. 1.10 donde el campo es nulo. El dibujo de una línea de campo no da directamente el valor del campo, aunque veremos que, de manera general, las líneas de campo convergen cuando nos aproximamos a una región de campo intenso y se separan al aproximarnos a una región de campo débil. En la Fig. 1.11 se han

Fig. 1.9 (a) Campo de una carga $q_1 = +10^{-9}$ C (b) campo de una carga $q_2 = -0,3 \cdot 10^{-9}$ C. Ambas representaciones son necesariamente toscas y sólo groseramente cuantitativas.



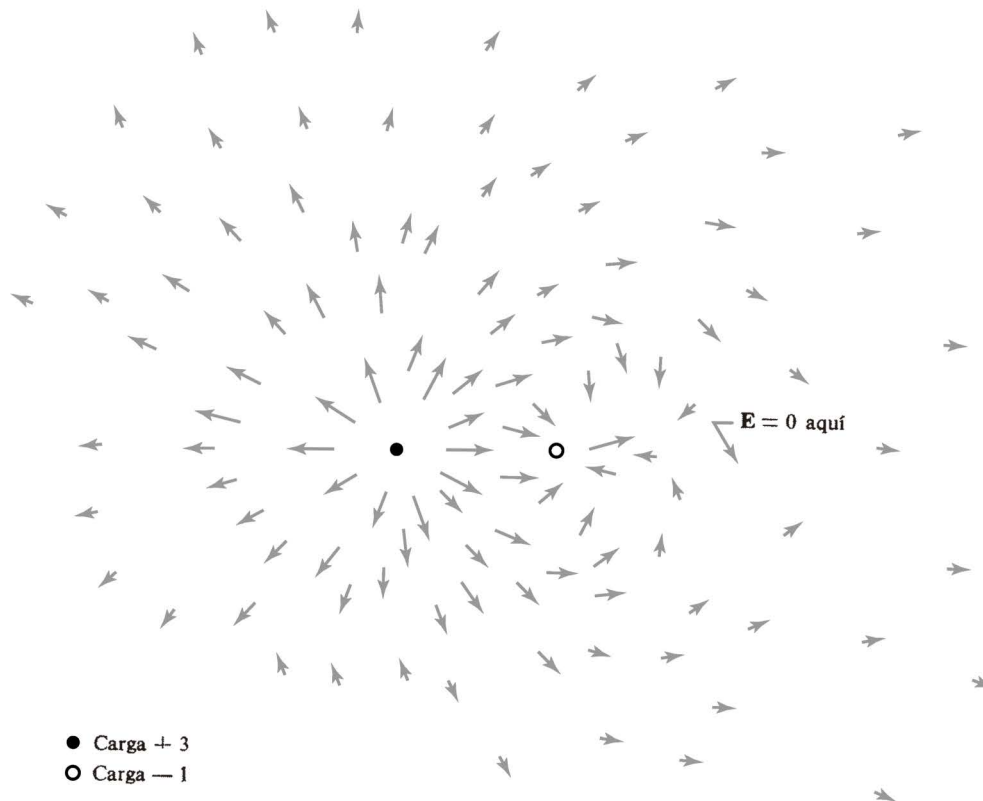


Fig. 1.10 El campo en las proximidades de dos cargas $q = + 10^{-9}$ C, $q_2 = - 0,3 \cdot 10^{-9}$ C es la superposición de los campos en la Fig. 9a y b.

dibujado algunas líneas de campo para la misma distribución de cargas que en la Fig. 1.10, una carga positiva de 10^{-9} C y una carga negativa de $- 0,3 \cdot 10^{-9}$ C. De nuevo, estamos restringidos por la naturaleza del papel y de la tinta a una sección bidimensional de un haz de curvas tridimensional.

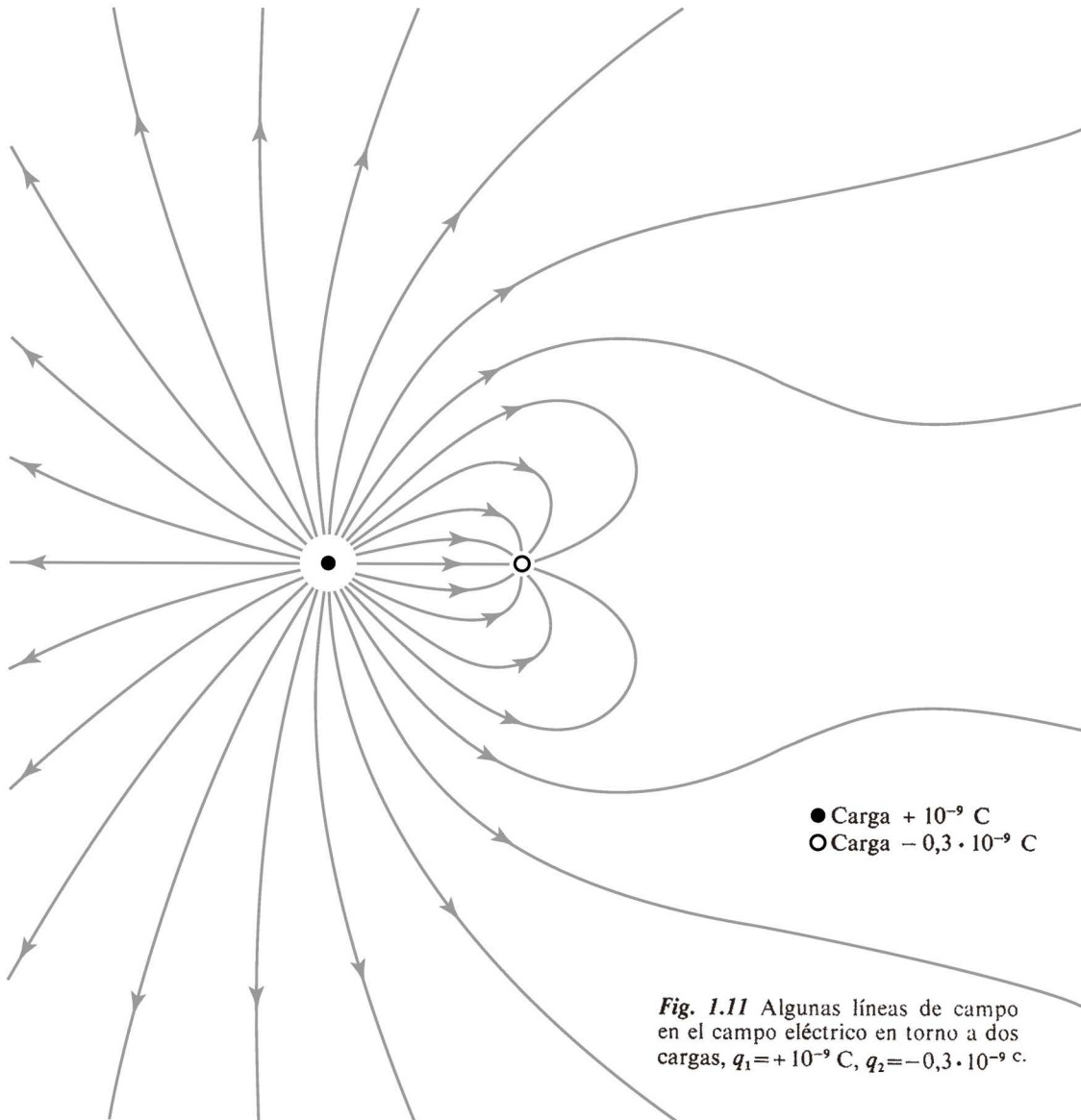


Fig. 1.11 Algunas líneas de campo en el campo eléctrico en torno a dos cargas, $q_1 = + 10^{-9}$ C, $q_2 = - 0,3 \cdot 10^{-9}$ C.

1.8 Distribución de cargas

Ahora vamos a generalizar pasando de *cargas puntiformes* a una *distribución continua de carga*. Una distribución cúbica de cargas se define por una función escalar ρ densidad de carga, la cual es función de la posición, de dimensiones *carga/volumen*. Es decir, ρ veces un

elemento de volumen da la cantidad de carga contenida en este elemento de volumen. El mismo símbolo se utiliza a menudo para designar la masa por unidad de volumen, pero en este libro siempre designaremos por ρ la carga por unidad de volumen. Si escribimos ρ en función de las coordenadas x, y, z , entonces $\rho(x, y, z) dx dy dz$ es la carga contenida en el elemento de volumen $dx dy dz$, localizada en el punto (x, y, z) .

Desde luego, a escala atómica la densidad de carga varía enormemente de un punto a otro; pero a pesar de todo resulta ser un concepto útil en este dominio. Sin embargo, lo utilizaremos principalmente cuando tratemos sistemas a gran escala, tan grandes que un elemento de volumen $dv = dx dy dz$ pueda ser muy pequeño con relación al tamaño de nuestro sistema aunque lo suficientemente grande para contener algunos átomos o cargas elementales. Como hemos señalado anteriormente, nos encaramos con un problema similar al definir la densidad másica de una substancia.

Si el manantial de campo eléctrico es una distribución continua de cargas en lugar de cargas puntiformes, solamente tenemos que reemplazar la suma en la Ec. 13 por la integral apropiada. La integral da el campo eléctrico en (x, y, z) , producido por cargas en otros puntos (x', y', z') .

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') \hat{\mathbf{r}} dx' dy' dz'}{r^2} \quad (15)$$

Ésta es una integral de volumen. Manteniendo fijo el punto (x, y, z) se hace recorrer a las variables de integración x', y' y z' todo el espacio que contiene carga, de este modo se suman las contribuciones de todas las porciones de carga. El vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ se dirige de (x', y', z') a (x, y, z) — a menos que deseemos colocar el signo menos ante la integral, en cuyo caso podemos invertir el sentido de $\hat{\mathbf{r}}$. Es difícil mantener siempre el signo correcto. Recordemos que el campo eléctrico se dirige *hacia fuera* de una carga positiva (Fig. 1.12).

En las proximidades de una carga puntiforme verdadera el campo eléctrico crece indefinidamente como $1/r^2$ al aproximarnos al punto. No tiene sentido hablar del campo *en* la carga puntiforme. Como nuestras fuentes físicas primarias de campo creemos que no son infinitas concentraciones de carga en un volumen nulo, sino estructuras finitas, ignoraremos las singularidades matemáticas implicadas en nuestro lenguaje carga-punto y las desecharemos del interior de los límites de nuestros manantiales elementales. Sin embargo, puede ser importante advertir que una distribución continua de carga no tiene el peligro de una singularidad, y permite definir el campo en puntos interiores a la misma distribución. Esto es debido a que la integral de volumen en la Ec. 15 evita el crecimiento indefinido en las proximidades de $r = 0$ por el hecho de que el elemento de volumen crece como $r^2 dr$. Es decir, en tanto ρ permanezca finita, el campo se mantendrá finito, incluso en el interior o en el contorno de una distribución de carga.

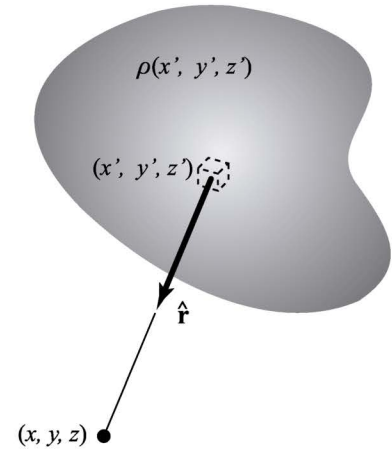


Fig. 1.12 Cada elemento de la distribución de carga $\rho(x', y', z')$ proporciona una contribución al campo eléctrico $\mathbf{E}$ en el punto (x, y, z) . El campo total en este punto es la suma de dichas contribuciones (Ec. 15).

1.9 Flujo

La relación entre el campo eléctrico y sus fuentes puede expresarse de una manera notablemente simple, que encontraremos muy útil. Para ello necesitamos definir una magnitud llamada *flujo*.

Consideremos cierto campo eléctrico en el espacio, y en este espacio cierta superficie cerrada arbitraria, como un globo de forma cualquiera. La figura 13 representa una superficie tal, insinuándose el campo por unas líneas de campo. Dividimos la superficie en pequeños pedazos los cuales son tan pequeños que en cada uno de ellos la superficie es prácticamente plana y el vector campo no varía apreciablemente de un punto a otro del pedazo. En otras palabras, no se permite al globo ser demasiado rugoso ni que su superficie pase por una singularidad* del campo, tal como una carga puntiforme. El área de un pedazo tiene un determinado valor en centímetros cuadrados y define una dirección y sentido únicos — la de la normal a su superficie dirigida hacia fuera. (Ya que la superficie es cerrada puede distinguirse su interior de su exterior; no hay ambigüedad.) Representemos este módulo, dirección y sentido por un vector. Para cada uno de los pedazos en que se ha dividido la superficie, tal como el pedazo número j , tenemos un vector $\mathbf{a}_j$ que da su área y orientación. Las operaciones efectuadas están dibujadas en la Fig. 1.13b y c. Adviértase que el vector $\mathbf{a}_j$ no depende en absoluto de la forma del pedazo; no importa cómo se haya dividido la superficie mientras los pedazos sean lo suficientemente pequeños.

Sea $\mathbf{E}_j$ el vector campo eléctrico en la posición del pedazo número j . El producto escalar $\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j$ es un número. A este número le llamamos *flujo* a través de esta porción de superficie. Para comprender el origen del nombre, imaginemos una función vectorial que represente la velocidad del movimiento en un fluido, por ejemplo, en un río, donde la velocidad varía de un lugar a otro pero es constante con el tiempo en una posición determinada. Denotemos este campo vectorial por $\mathbf{v}$ medido por ejemplo en centímetros por segundo. Si $\mathbf{a}$ es el área orientada, en centímetros cuadrados, de una figura sumergida en el agua, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ es el *flujo por unidad de tiempo* de agua, a través de la figura, en centímetros cúbicos por segundo (Fig. 1.14). Debemos señalar que nuestra definición de flujo puede aplicarse a cualquier función vectorial, puede representar cualquier variable física.

Sumemos el flujo a través de todos los pedazos para obtener el flujo a través de la superficie total, una magnitud escalar que denotaremos por:

$$\Phi = \sum_{\text{toda } j} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j \quad (16)$$

* Por una singularidad del campo, generalmente entendemos no solamente un manantial puntiforme, sino también un lugar donde el campo cambia de valor o dirección discontinuamente, tal como en una capa infinitamente delgada de carga concentrada. En realidad, esta última clase de singularidad, más leve, no nos causaría dificultades a menos que la superficie del globo coincidiese con la superficie de discontinuidad en un área finita.

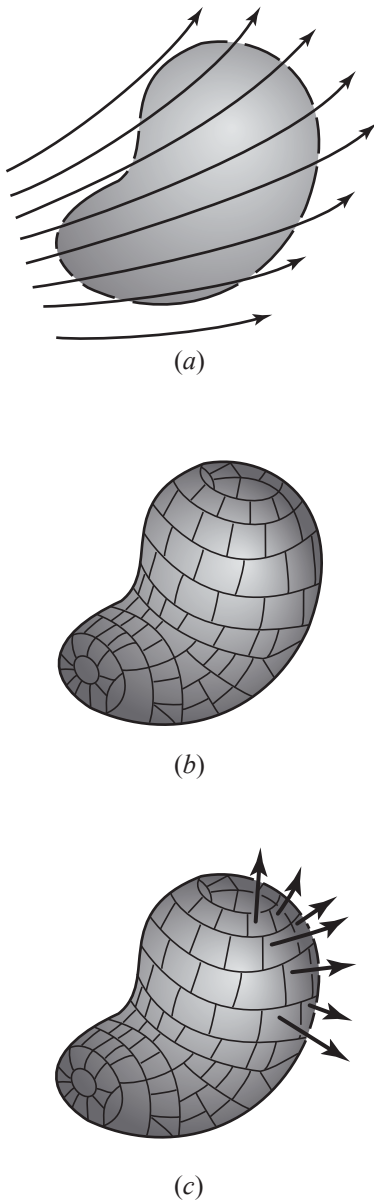


Fig. 1.13 (a) Una superficie cerrada en un campo vectorial está dividida (b) en pequeños elementos de superficie (c). Cada elemento de superficie está representado por un vector hacia el exterior.

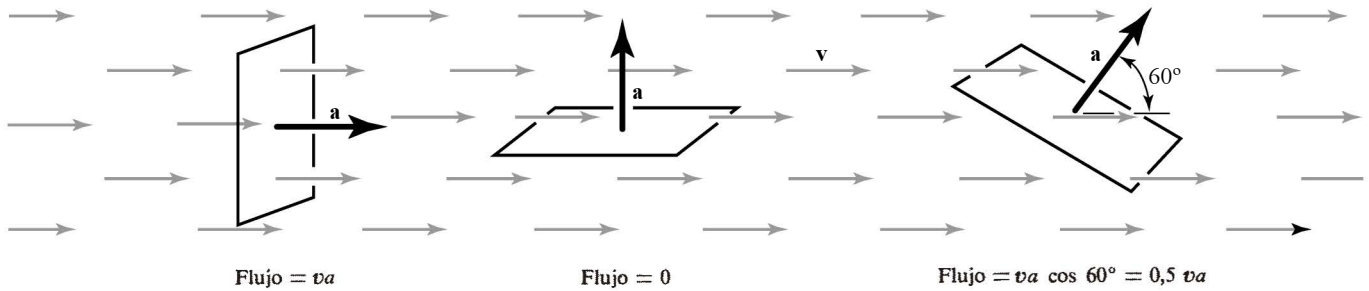


Fig. 1.14 El flujo a través de la figura de área a es $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$. Si $\mathbf{v}$ es la velocidad de un fluido, el flujo es el volumen de fluido que atraviesa la figura, por unidad de tiempo.

Haciendo que los pedazos sean cada vez más pequeños y numerosos ilimitadamente, pasamos de la suma de la Ec. 16 a la integral de superficie

$$\Phi = \int_{\text{Toda la superficie}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (17)$$

La integral de superficie de una función vectorial $\mathbf{F}$, sobre una superficie S , significa precisamente esto: Dividir S en pequeños pedazos, cada uno de ellos representado por un vector hacia fuera, de módulo igual al área del pedazo; en cada pedazo efectuamos el producto escalar del vector área del mismo y el $\mathbf{F}$ local; sumamos todos estos productos, y el límite de esta suma, al hacer pequeños los pedazos, es la integral de superficie. No debemos asustarnos por la perspectiva de tener que realizar un cálculo tal para una superficie de forma complicada, como la de la Fig. 1.13. La propiedad admirable que vamos a demostrar lo hace innecesario.

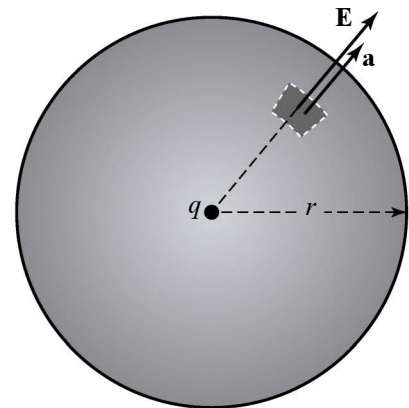
1.10 Ley de Gauss

Vamos a considerar el caso más simple que podemos imaginar; supongamos que el campo es el debido a una sola carga puntiforme aislada positiva q y que la superficie es una esfera de radio r con centro en la carga puntiforme (Fig. 1.15). ¿Cuál es el flujo Φ a través de esta superficie? La solución es fácil debido a que el módulo de $\mathbf{E}$ en todo punto de la superficie es q/r^2 y su dirección y sentido es el mismo que el de la normal hacia el exterior en este punto. Tenemos así:

$$\Phi = E \times \text{área total} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad (18)$$

El flujo es independiente del tamaño de la esfera.

Fig. 1.15 En el campo $\mathbf{E}$ de una carga puntiforme q , ¿cuál es el flujo saliente de una esfera que rodea a ?



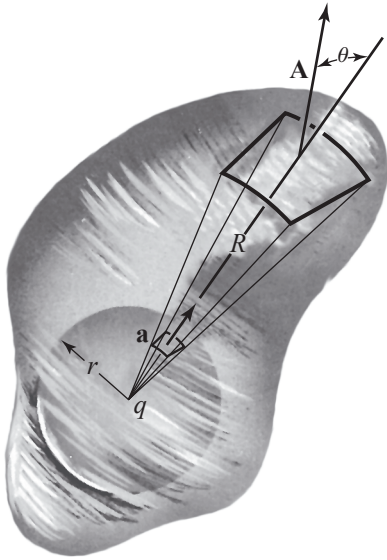


Fig. 1.16 Demostración de que el flujo a través de cualquier superficie cerrada en torno a q es igual al flujo a través de la esfera.

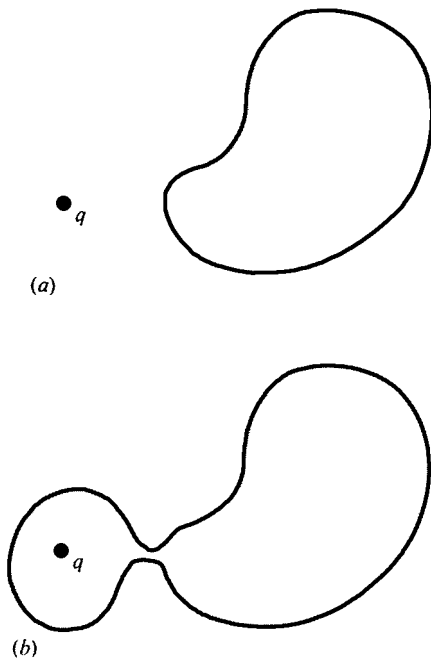


Fig. 1.17 Para demostrar que en (a) el flujo a través de S es nulo, se puede hacer uso de (b).

Imaginemos ahora una segunda superficie, o un globo, que envuelva a la primera y que no sea esférica, como en la Fig. 1.16. El flujo total a través de esta superficie es el mismo que a través de la esfera. Para demostrarlo, consideremos un cono de vértice en q , el cual corta una pequeña parte a de la esfera y continúa hacia la superficie exterior donde corta un pedazo A a una distancia R de la carga puntiforme. El área del pedazo A es mayor que la del a , su cociente es igual al producto de dos factores: el primero es la relación de los cuadrados de las distancias $(R/r)^2$; el segundo factor es debido a su inclinación y vale $1/\cos \theta$. El ángulo θ es el ángulo entre la normal hacia el exterior y la dirección radial (véase Fig. 1.16). El campo eléctrico en aquel lugar vale $(r/R)^2$ por su valor en la esfera y también está dirigido radialmente. Siendo $E_{(R)}$ el campo en el pedazo exterior y $E_{(r)}$ en la esfera, tenemos:

$$\text{Flujo a través del pedazo exterior} = \mathbf{E}_{(R)} \cdot \mathbf{A} = E_{(R)} A \cos \theta$$

$$\text{Flujo a través del pedazo interior} = \mathbf{E}_{(r)} \cdot \mathbf{a} = E_{(r)} a$$

$$E_{(R)} A \cos \theta = \left[E_{(r)} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \left[a \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{\cos \theta} \right] \cos \theta = E_{(r)} a \quad (19)$$

Esto prueba que el flujo a través de los dos pedazos es el mismo.

Ahora, cada pedazo sobre la superficie exterior puede hacerse corresponder, de esta manera, con parte de la superficie esférica, así que el flujo total debe ser el mismo a través de las dos superficies. Es decir, el flujo a través de la nueva superficie debe ser precisamente igual a $\frac{1}{\epsilon_0} q$. Pero esta superficie tenía forma y tamaño *arbitrarios* *. Deducimos que: el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie que tenga en su interior una carga q vale $\frac{1}{\epsilon_0} q$. Como corolario podemos decir que el flujo total a través de una superficie cerrada es *nulo* si la carga está en el *exterior* de la superficie. Dejamos que el lector demuestre esto, ayudado por la Fig. 1.17.

Existe una forma de considerar esto que hace que el resultado parezca más evidente. Imaginemos que q es una fuente que emite partículas en todas direcciones — tales como proyectiles o fotones — en número constante por unidad de tiempo. Evidentemente el flujo de partículas a través de una ventana de área unidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de q . De aquí que podamos deducir una analogía entre la intensidad del campo eléctrico E y el valor del flujo de partículas, en proyectiles por unidad de superficie en la unidad de tiempo. Se ve claramente que el flujo de proyectiles a través de una superficie que rodee completamente a q es independiente del tamaño y de la forma de tal superficie, pues precisamente es el número total emitido por unidad de tiempo. Paralelamente, el flujo de E a través de una superficie cerrada debe ser independiente de la

* Sin duda, la segunda superficie rodeaba a la esfera, realmente no era preciso. Además, la esfera puede tomarse tan pequeña como queramos.

forma y tamaño. El aspecto común responsable de esto es el comportamiento, inverso del cuadrado, de la intensidad.

La situación está ya preparada para la superposición. Todo campo eléctrico es igual a la suma de los campos de sus manantiales individuales. Esta propiedad se manifestó al establecer la ley de Coulomb en la Ec. 13. El flujo es una magnitud aditiva en el mismo sentido, pues si tenemos cierto número de manantiales $q_1, q_2, \dots, q_N$, cuyos campos respectivos, si cada uno de ellos estuviese solo, serían $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_N$, el flujo Φ a través de una superficie S en el campo actual puede escribirse

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_N] \cdot d\mathbf{a} \quad (20)$$

Hemos visto que $\int_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{a}$ es igual a $\frac{1}{\epsilon_0} q_n$ si la carga q_n está dentro de S y si no es igual a cero. Así pues, cada carga q en el interior de la superficie contribuye exactamente en $\frac{1}{\epsilon_0} q$ a la integral de superficie de la Ec. 20 y todas las cargas en el exterior no contribuyen en nada. Hemos llegado a la ley de Gauss:

El flujo del campo eléctrico $\mathbf{E}$ a través de una superficie cerrada cualquiera, es decir, la integral $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ extendida a la superficie, es igual a $\frac{1}{\epsilon_0}$ por la carga total encerrada por la superficie:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dv \quad (21)$$

A lo establecido se le llama *ley* por ser equivalente a la ley de Coulomb y puede servir igualmente como ley básica de las interacciones electrostáticas, una vez definido el campo y la carga. La ley de Gauss y la ley de Coulomb no son dos leyes físicas independientes, sino la misma ley expresada de manera distinta*.

Reflexionando acerca de nuestra demostración, vemos que ésta dependía de la naturaleza de la interacción, inversa del cuadrado, y por supuesto de la aditividad de las interacciones, o superposición. Así que el teorema es aplicable en la física a todo campo inverso del cuadrado, por ejemplo, al campo gravitatorio.

Es fácil ver que la ley de Gauss *no* se cumpliría si, por ejemplo, la ley de la fuerza fuese inversa al cubo. Pues en este caso el flujo del

* Existe una diferencia, sin consecuencias aquí, pero apropiada para nuestro estudio posterior de los campos de las cargas móviles. Obedecen a la ley de Gauss un tipo de campos más amplio que los representados por el campo electrostático. En particular, un campo que sea inversamente proporcional al cuadrado de r pero sin simetría esférica, puede satisfacer a la ley de Gauss. Dicho de otro modo, la ley de Gauss en sí no implica la simetría del campo de un manantial puntiforme que está implícita en la ley de Coulomb.

campo eléctrico de una carga puntiforme q a través de una esfera de radio R con el centro en la carga sería

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0 R} \quad (22)$$

Haciendo la esfera suficientemente grande podemos hacer el flujo a través de ella tan pequeño como queramos, mientras que la carga total en el interior permanezca constante.

Este notable teorema aumenta nuestro alcance de dos maneras. Primero, revela una conexión entre el campo y sus fuentes que es inversa a la ley de Coulomb. La ley de Coulomb nos indica cómo deducir el campo eléctrico si se dan las cargas; con la ley de Gauss podemos determinar qué cantidad de carga existe en una región si conocemos el campo. Segundo, la relación matemática que se ha demostrado es una poderosa herramienta analítica, que, como veremos, puede facilitar la resolución de problemas complicados.

Fig. 1.18 Distribución de carga con simetría esférica.

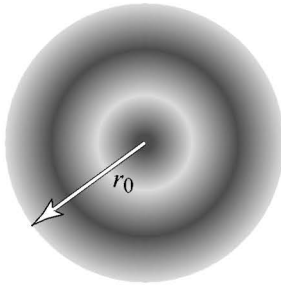
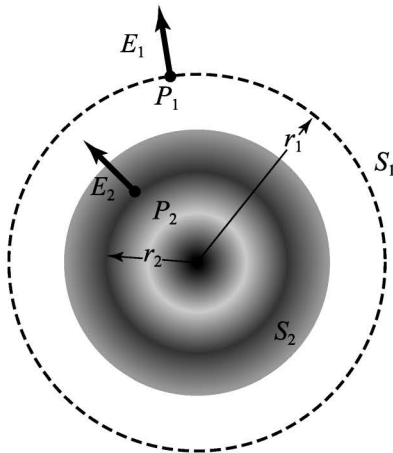


Fig. 1.19 Campo eléctrico de una distribución esférica de carga.



1.11 Campo de una distribución esférica de carga

Podemos utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico de una distribución de carga con simetría esférica, es decir, una distribución en la cual la densidad de carga ρ depende solamente del radio desde un punto central. La Fig. 1.18 representa la sección recta de una distribución de este tipo. En ésta la densidad de carga es grande en el centro, disminuye y luego aumenta de nuevo al aumentar la distancia al centro, y es nula para distancias mayores que r_0 . ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto tal como P_1 , en el exterior de la distribución, o en P_2 , dentro de ella (Fig. 1.19)? Si operamos solamente a partir de la ley de Coulomb, tendríamos que efectuar una integración que sumase los vectores campo eléctrico en P_1 debidos a cada volumen elemental en la distribución de carga. Elijamos un método distinto que aproveche a la vez la simetría del sistema y la ley de Gauss.

A causa de la simetría esférica, el campo eléctrico en cualquier punto debe estar dirigido radialmente — no es posible otra dirección. Además, el módulo E del campo debe ser el mismo en todos los puntos de una superficie esférica S_1 de radio r_1 , pues todos estos puntos son equivalentes. Llamemos E_1 al módulo de este campo. El flujo a través de esta superficie S_1 es por lo tanto $4\pi r_1^2 E_1$, y por la ley de Gauss debe ser igual a $1/\epsilon_0$ veces la carga encerrada por la superficie. Es decir, $\frac{1}{\epsilon_0} r_1^2 E_1 = 1/\epsilon_0$ (carga dentro de S_1) o bien

$$E_1 = \frac{\text{carga dentro de } S_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \quad (23)$$

Comparándolo con el campo de una carga puntiforme, vemos que el campo en todo punto de S_1 es el mismo que si toda la carga dentro de S_1 estuviera concentrada en el centro. El mismo razonamiento se

aplica a una esfera trazada *dentro* de la distribución de carga. El campo en todo punto de S_2 es el mismo que si toda la carga dentro de S_2 estuviera en el centro, y toda carga *externa* a S_2 , ausente. Evidentemente el campo en el interior de una distribución esférica de carga « hueca » es nulo (Fig. 1.20).

El mismo razonamiento aplicado al campo gravitatorio nos expresaría que la tierra, suponiendo que es simétricamente esférica en su distribución de masa, atrae a los cuerpos exteriores como si su masa estuviese concentrada en el centro. Esta manifestación es bien conocida. El que esté inclinado a pensar que el principio expresa una propiedad evidente del centro de masa, debe tener presente que el teorema, en general, no es completamente cierto para cuerpos de otra forma. Un cubo perfecto de densidad uniforme *no* atrae a los cuerpos exteriores como si su masa estuviera concentrada en su centro geométrico.

Newton no consideró que el teorema fuera evidente. Necesitó como clave de su demostración que la luna en su órbita en torno a la tierra y un cuerpo que cae sobre la tierra corresponden a fuerzas similares. La demora de cerca de veinte años en la publicación de la teoría de la gravitación de Newton fue debida al parecer, al menos en parte, a los inconvenientes que halló para probar este teorema a su satisfacción. La demostración que finalmente ideó, publicada en su *Principia* en 1686 (Libro I, Sec. XII, Teorema XXXI) es un prodigio de ingenio en la cual, vulgarmente hablando, efectuó una integración cúbica tramposa sin la ayuda del calculo integral tal como lo conocemos nosotros. La demostración es bastante más larga que todo nuestro estudio precedente de la ley de Gauss, y razonada de manera más complicada. Vemos que, a pesar de todo su amplio recurso matemático y originalidad, le faltó a Newton el teorema de Gauss; una relación que, una vez demostrada, nos parece tan evidente como para ser casi trivial.

1.12 Campo de una carga lineal

Un hilo recto largo cargado puede caracterizarse, si despreciamos su espesor, por la cantidad de carga contenida en la unidad de longitud. Designemos esta *densidad lineal de carga* por λ , medida en C/m. ¿Cuál es el campo eléctrico de tal línea cargada, supuesta indefinida y con densidad constante λ ? Resolveremos el problema de dos maneras; primero, por integración, partiendo de la ley de Coulomb.

Para calcular el campo en un punto P , representado en la Fig. 1.21, debemos sumar las contribuciones de todos los segmentos de línea cargada, uno de los cuales está indicado por un segmento de longitud dx . La carga dq en este elemento vale $dq = \lambda dx$. Tomamos como dirección del eje x la de la línea cargada, hacemos pasar el eje y por el punto P , el cual dista r cm de la línea. Es provechoso

Fig. 1.20 El campo es nulo en el interior de una capa esférica de carga.

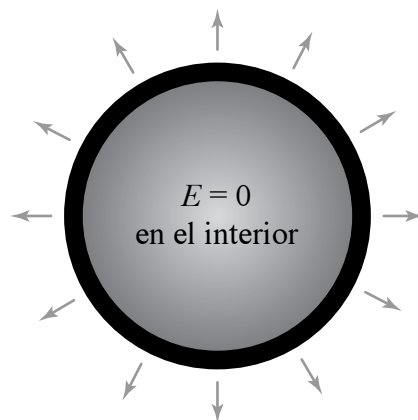
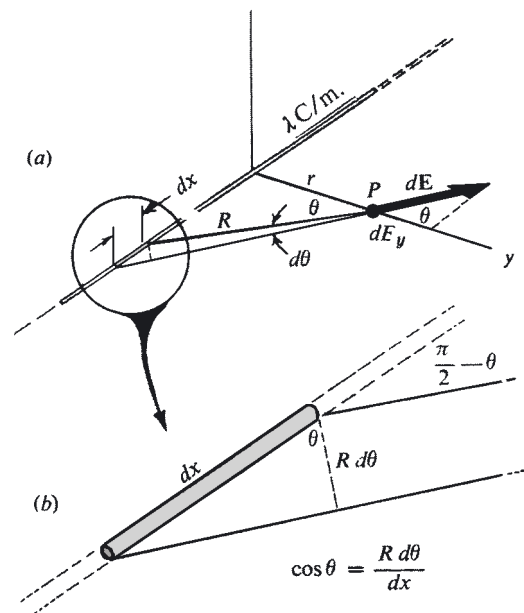


Fig. 1.21 (a) El campo en P es la suma vectorial de las contribuciones de cada elemento de carga lineal. (b) Detalle de (a).



valernos de la simetría desde el principio. Es evidente que el campo eléctrico en P debe dirigirse según el eje y , así que E_x y E_z son nulas. La contribución de la carga dq a la componente y del campo eléctrico en P es

$$dE_y = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta \quad (24)$$

en donde θ es el ángulo que forma el vector campo debido a dq con la dirección y . La componente total según y es pues

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} dx \quad (25)$$

Es conveniente utilizar θ como variable de integración. Ya que $R = r/\cos \theta$ y $dx = R d\theta/\cos \theta$, la integral se convierte en:

$$E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda \cos \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (26)$$

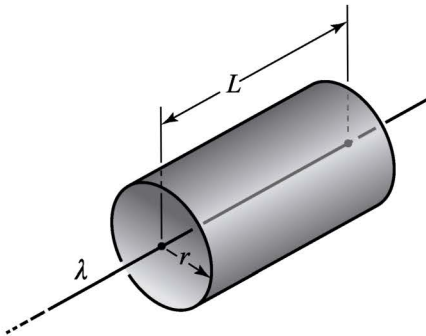
Vemos que el campo de una línea cargada infinitamente larga y con densidad lineal de carga constante, es proporcional al recíproco de la distancia a la línea. Su dirección es radial y el sentido hacia fuera si la línea contiene carga positiva y hacia ella si es negativa.

La ley de Gauss conduce directamente al mismo resultado. Rotando un segmento de la línea cargada con un cilindro circular de longitud L y radio r , como en la Fig. 1.22, consideremos el flujo a través de esta superficie. Como ya hemos advertido, la simetría garantiza que el campo sea radial, así que el flujo a través de las bases del cilindro es nulo. El flujo a través de la superficie lateral es igual al área, $2\pi rL$, por E_r , el campo en la superficie. Por otro lado, la carga encerrada en la superficie es λL , así que la ley de Gauss nos da $2\pi rLE_r = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda L$, o sea

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (27)$$

que concuerda con la Ec. 26.

Fig. 1.22 Empleo de la ley de Gauss para hallar el campo de una carga lineal.



1.13 Campo de una distribución de carga plana e indefinida

Se llama *distribución superficial de carga* a la carga eléctrica distribuida de manera continua en una lámina delgada. Consideremos

una lámina plana indefinida, con densidad superficial σ constante. El campo eléctrico a cada lado de la lámina, sea cual fuere su módulo, indudablemente debe estar dirigido perpendicularmente al plano de la lámina; es la única dirección posible en el sistema. También a causa de la simetría, el campo debe tener el mismo módulo y sentidos contrarios en dos puntos P y P' equidistantes de la lámina en lados opuestos. Establecido esto, la ley de Gauss nos da inmediatamente la intensidad de campo, operando como sigue: dibujemos un cilindro, como en la Fig. 1.23, con P a un lado y P' en el otro, cuya sección recta tiene área A . El flujo saliente solamente se halla en los extremos, así que si E_P denota el módulo del campo en P , y $E_{P'}$ el módulo en P' , el flujo saliente es $AE_P + AE_{P'} = 2AE_P$. La carga en el interior es σA . De donde $2AE_P = \sigma A/\epsilon_0$, o bien

$$E_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (28)$$

Vemos que la intensidad del campo es independiente de r , la distancia a la lámina. La ecuación 28 podría deducirse de manera más laboriosa calculando el vector suma de las contribuciones al campo en P de todos los pequeños elementos de carga en la lámina.

El campo de una línea cargada indefinida, varía inversamente a la distancia a la línea, mientras que el campo de una lámina indefinida tiene la misma intensidad a cualquier distancia. Hablando de manera aproximada, la parte de la línea cargada que es principalmente responsable del campo en P , en la Fig. 1.21, es la parte próxima — la carga dentro de una distancia del orden de magnitud r . Si las agrupamos y no tenemos en cuenta las demás, tenemos una carga concentrada de valor $q \approx \lambda r$, la cual debe producir un campo proporcional a $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, o a $\lambda/4\pi\epsilon_0 r$. En este caso de la lámina, la cantidad de carga que es «efectiva» en este sentido, aumenta proporcionalmente a r^2 cuando nos separamos de la lámina, lo cual compensa precisamente la disminución $1/r^2$ en el campo de cualquier elemento dado de carga.

1.14 Fuerza sobre una capa de carga

La esfera de la Fig. 1.24 tiene una carga distribuida sobre su superficie con la densidad uniforme σ C/m². Dentro de la esfera, como ya hemos aprendido, el campo eléctrico de tal distribución de carga es nulo. Fuera de la esfera el campo es $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$, donde Q es la carga total de la esfera, igual a $4\pi r_0^2 \sigma$. Justo fuera de la esfera, muy próximo a su superficie, la intensidad del campo es σ/ϵ_0 . Comparemos esto con la Ec. 28 y la Fig. 1.23. En ambos casos se cumple la ley de Gauss: la *variación* de E , de un lado al otro de la capa, es igual a σ/ϵ_0 .

¿Cuál es la fuerza eléctrica experimentada por las cargas que constituyen esta distribución? Al principio la cuestión puede parecer desconcertante debido a que el campo E se debe a estas mismas cargas. Lo que debemos considerar es la fuerza sobre cierta carga ele-

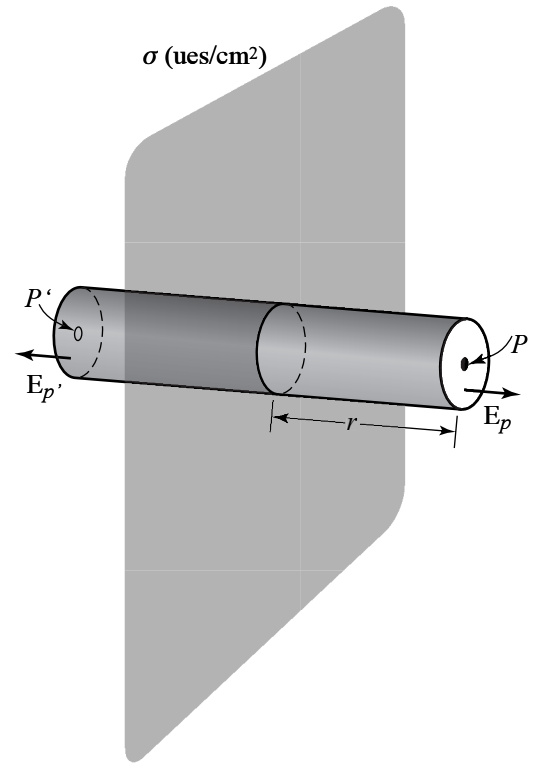


Fig. 1.23 Empleo de la ley de Gauss para hallar el campo de una lámina plana e indefinida de carga.

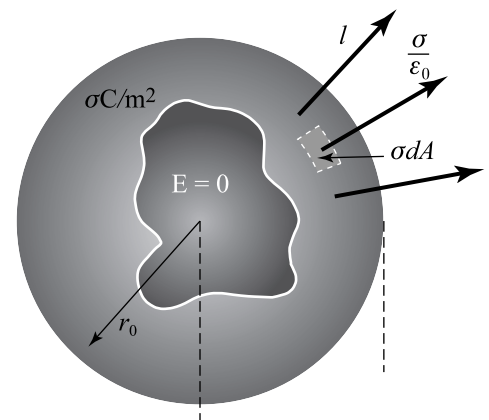


Fig. 1.24 Una superficie esférica con densidad de carga uniforme σ .

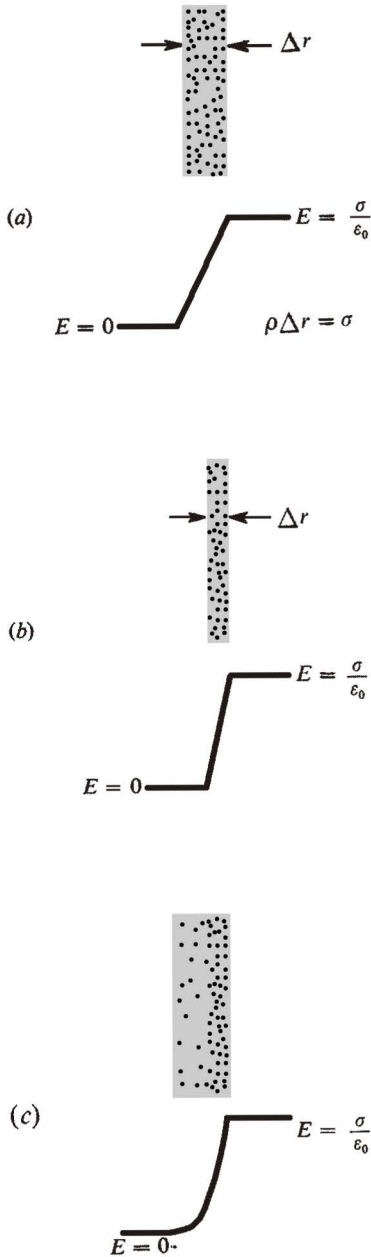


Fig. 1.25 La variación del campo resultante en una capa de la carga depende solamente de la carga total por unidad de superficie.

mental dq , tal como un trocito de superficie dA con carga $dq = \sigma dA$. Consideremos, separadamente, la fuerza sobre dq debida a todas las demás cargas de la distribución, y la fuerza sobre el trocito debido a las cargas del propio trozo. Esta última fuerza seguramente es nula. La repulsión de Coulomb entre las cargas dentro del trozo es otro ejemplo de la tercera ley de Newton; el trozo en conjunto no puede empujarse a sí mismo. Esto simplifica nuestro problema, pues nos permite usar el campo eléctrico $\mathbf{E}$ entero, *incluyendo* el campo debido a todas las cargas del trozo, al calcular la fuerza dF sobre el elemento de carga dq :

$$dF = \mathbf{E} dq = \mathbf{E} \sigma dA \quad (29)$$

¿Pero qué campo E usaremos, el campo $E = \sigma/\epsilon_0$ fuera de la esfera o el campo $E = 0$ dentro? La contestación correcta, como demostraremos pronto, es el *promedio* de los dos campos.

$$dF = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} + 0 \right) \sigma dA = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dA \quad (30)$$

Para justificar esto consideremos un caso más general, uno que introducirá un cuadro más real de la carga superficial. Las capas reales de carga no tienen espesor nulo. La Figura 1.25 presenta algunas maneras en que la carga puede distribuirse a lo largo del espesor de una capa. En cada ejemplo el valor de σ , la carga total por unidad de superficie de la capa, es la misma. Estas pueden ser secciones rectas de una pequeña porción de la superficie esférica en la Fig. 1.24 a una escala tal que la curvatura no sea apreciable. Sin embargo, para hacerlo más general, haremos que el campo a la izquierda sea E_1 (en vez de 0, como ocurre en el interior de la esfera), con E_2 la intensidad del campo a la derecha. La condición impuesta por la ley de Gauss, para un σ dada, es en cada caso

$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (31)$$

Ahora examinemos cuidadosamente la capa donde el campo va cambiando continuamente de E_1 a E_2 y hay una densidad cúbica de carga $\rho(x)$ que se extiende desde $x = 0$ a $x = x_0$, el espesor de la capa (Fig. 1.26). Consideremos una lámina mucho más delgada, de espesor $dx \ll x_0$, que contiene por unidad de superficie una carga ρdx . La fuerza sobre ella es

$$dF = E \rho dx \quad (32)$$

Así que la fuerza total por unidad de superficie de nuestra capa es

$$F = \int_0^{x_0} E \rho dx \quad (33)$$